

Exercice 1

Soit $h(x) = g(x) - f(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$. Donc h est croissante sur $\mathbb{R}^+$, de plus $h(0) = g(0) - f(0) = 0$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) \geq 0$, soit $g(x) \geq f(x)$.

Exercice 2

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Limite en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc, par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$; or $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$, donc $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

Limite en $+\infty$

Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x + 1}{x\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} + x} = \frac{1 + 1/x}{\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} + 1}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x + 1/x^2) = 1$, $\lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = 1$, donc, par composition des limites,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} = 1$; de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x) = 1$, on en déduit que $\lim_{+\infty} f = \frac{1}{2}$.

2. Equation de la droite asymptote à C en $-\infty$

Pour tout $x < 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{-x\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} - x}{x} = -\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} - 1$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$.

Pour tout $x < 0$, $f(x) + 2x = \sqrt{x^2 + x + 1} + x = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \frac{1 + 1/x}{-\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} - 1}$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = -\frac{1}{2}$.

Une équation de la droite asymptote en $-\infty$ est $y = -2x - \frac{1}{2}$.

Exercice 3

1. a) Pour tout x , $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$, $P'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$

On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
P'(x)	+	0	-	0	+
P(x)	$-\infty$	-1	-2	9	$+\infty$

Sur $]-\infty, 1]$, $P(x) < 0$.

Sur $[1, +\infty[$, la fonction P est continue et strictement croissante, au vu du tableau de variations et par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, P admet un zéro unique α dans $[1, +\infty[$ qui appartient à $[1, 2]$.

$P(1,6) \approx -0,488$ et $P(1,7) \approx 0,156$, donc $1,6 < \alpha < 1,7$ (en fait $\alpha \approx 1,67765$).

2. $x \in D =]-1, +\infty[$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

a) f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition, et on a, pour

$$\text{tout } x \in D, f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2} = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha) \approx -0,12$	0

b) $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, une équation de la tangente D' au point d'abscisse 0 est $y = 1 - x$.

$$\text{Pour tout } x \in D, f(x) - (1 - x) = \frac{x^3(x-1)}{1+x^3} = d(x).$$

x	-1	0	1	$+\infty$
$d(x)$	$\parallel$	+ 0 -	0 +	

Ce tableau précise la position de la courbe par rapport à la tangente D' .

c) $f(1) = 0$, $f'(1) = -1/2$, une équation de la tangente D'' au point d'abscisse 1 est $y = -(x-1)/2$.

$$\text{Pour tout } x \in D, f(x) + (x-1)/2 = \frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{2(1+x^3)} \geq 0.$$

Donc la courbe est toujours au-dessus de D'' .

