Exercice 1. Soit $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{|x-1|+x}$.

Si $x\le 1$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{1-x+x}=x^2+2x$. La représentation graphique de f est une partie de parabole sur $]-\infty,1]$. La courbe admet donc une branche parabolique d'axe (Oy) quand x tend vers $-\infty$.

Si $x\ge 1$, $f(x)-\dfrac{2x+5}{4}=\dfrac{x^2+2x}{2x-1}-\dfrac{2x+5}{4}=\dfrac{5}{4(2x-1)}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\dfrac{2x+5}{4})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{4(2x-1)}=0$.

Donc la droite d'équation $y=\dfrac{2x+5}{4}$ est asymptote en $+\infty$.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur [a, b] telle que $f(a)\ge a$ et $f(b)\le b$.

Posons, pour tout $x\in[a,b]$, $h(x)=f(x)-x$.

La fonction h est continue sur [a,b] en tant que somme de deux fonctions continues sur [a, b].

$h(a)=f(a)-a\ge 0$ et $h(b)=f(b)-b\le 0$, ainsi $0\in[h(b),h(a)]$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in[a,b]$ tel que $h(c)=0$, soit $f(c)=c$.

Exercice 3. 1. Pour tout x, $f(x)=2x^3-3x^2-12x-10$, $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$.

On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0		+		
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-30	$\nearrow$	22	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur $]-\infty,2]$, $f(x)<0$.

Sur $[2,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante, au vu du tableau de variations et par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f admet un zéro unique α dans $[2,+\infty[$ qui appartient à [2, 4].

3. $f(3,571)\approx -0,033$ et $f(3,572)\approx 0,01$, donc $3,571<\alpha<3,572$.

Exercice 4. Pour l'aller : soit f(t) la distance parcourue depuis Metz (soit D la distance du trajet choisi), f est une fonction de [8, 12] sur [0, D] continue et croissante.

Pour le retour : soit g(t) la distance qui nous sépare de Metz, g est une fonction de [8, 12] sur [0, D] continue et décroissante.

Soit $h(t)=f(t)-g(t)$, h est continue sur [8, 12].

h(8) = f(8) – g(8) = -D et h(12) = f(12) – g(12) = D, ainsi $0\in[h(8),h(12)]$; donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0\in[8,12]$ tel que $h(t_0)=0$, soit $f(t_0)=g(t_0)$.