Théorème de Fermat : l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en nombres entiers x, y et z strictement positifs si n est un entier supérieur ou égal à 3 (démontré en 1994).

Le but du problème est de résoudre cette équation pour n = 2, c'est-à-dire de trouver les triplets pythagoriciens (x, y, z) vérifiant : $x^2 + y^2 = z^2$.

1. a) Montrer que l'on peut se limiter à étudier les solutions pour lesquelles $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$ (x, y et z premiers entre eux dans leur ensemble).

b) Si $x^2 + y^2 = z^2$ et $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$, montrer que x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.

2. Soit (x, y, z) un triplet solution avec $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$.

a) Montrer que z est impair et que x et y sont de parités contraires.
Pour la suite on supposera : x impair, y pair et z impair.

b) Montrer que $\text{pgcd}(z - x, z + x) = 2$.
Il existe donc $(\alpha, \beta, y') \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que : $z - x = 2\alpha, z + x = 2\beta, y = 2y'$.
Vérifier que : $(y')^2 = \alpha\beta$ et $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$.

c) En utilisant les décompositions primaires, montrer qu'il existe $(u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $\alpha = u^2, \beta = v^2, \text{pgcd}(u, v) = 1$.

d) En déduire que : $x = v^2 - u^2, y = 2uv, z = v^2 + u^2$.

3. Déterminer l'ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant : $x^2 + y^2 = z^2$.
On justifiera que cet ensemble est :

$$E = \left\{(d(v^2 - u^2), 2duv, d(u^2 + v^2)); (d, u, v) \in (\mathbb{N}^*)^3, u < v\right\}$$

$$\cup \left\{(2duv, d(v^2 - u^2), d(u^2 + v^2)); (d, u, v) \in (\mathbb{N}^*)^3, u < v\right\}.$$

4. Donner dix solutions.