Exercice 1

1. Une équation cartésienne de d_1 est 6x + 2y +3 = 0, le vecteur de coordonnées (-2, 6) est un vecteur directeur de cette droite, donc $\vec{u}(-1,3)$ est aussi un vecteur directeur de d_1.

2. Soit d_2 la droite parallèle à d_1 passant par $A\left(-\frac{12}{5},2\right)$, une équation cartésienne de d_2 est

$3x+y+c=0$.

$A\in d_2 \Leftrightarrow 3\times\left(-\frac{12}{5}\right)+2+c=0 \Leftrightarrow c=\frac{36}{5}-\frac{10}{5}=\frac{26}{5}$.

Une équation cartésienne de d_2 est $3x+y+\frac{26}{5}=0$, soit $15x+5y+26=0$.

3. Soit d_3 la droite passant par B(4, 4) et de vecteur directeur $\vec{v}(3,1)$.

Une équation cartésienne de d_3 est $x-3y+c=0$.

$B\in d_3 \Leftrightarrow 4-12+c=0 \Leftrightarrow c=8$.

Une équation cartésienne de d_3 est $x-3y+8=0$.

4. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_3 sont sécantes. Soit C le point d'intersection de d_1 et d_3.

Les coordonnées de C vérifient le système $\begin{cases}6x+2y=-3\\x-3y=-8\end{cases}$.

On a :

$\begin{cases}6x+2y=-3\\x-3y=-8\end{cases}\begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}\begin{matrix}1\\-6\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases}20x=-25\\20y=45\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-5/4\\y=9/4\end{cases}$

Les coordonnées de C sont $(-5/4,9/4)$.

Exercice 2

1. a. $p_0=8000$

b. $p_1=p_0-0{,}1p_0+400=8000-800+400=7600$

$p_2=p_1-0{,}1p_1+400=7600-760+400=7240$

c. Pour tout n, $p_{n+1}=p_n-0{,}1p_n+400=0{,}9p_n+400$.

2. a. $p_1-p_0=-400$ et $p_2-p_1=-360$, $p_2-p_1\neq p_1-p_0$, donc la suite n'est pas arithmétique.

b. $\frac{p_2}{p_1}\neq\frac{p_1}{p_0}$ car $p_2p_0=57920000$ et $p_1^2=57760000$, donc la suite n'est pas géométrique.

3. a. On pose, pour tout n, $v_n=p_n-4000$. Pour tout n, on a :

$v_{n+1}=p_{n+1}-4000=0{,}9p_n+400-4000=0{,}9p_n-3600=0{,}9(p_n-4000)=0{,}9v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0=p_0-4000=4000$.

b. On en déduit que, pour tout n, $v_n=4000\times(0{,}9)^n$, $p_n=v_n+4000=4000(1+(0{,}9)^n)$.

4.

	P>6000	P	N
initial		8000	0
	vrai	7600	1
	vrai	7240	2
	vrai	6916	3
	vrai	6624,4	4
	vrai	6361,96	5

	vrai	6125,764	6
	vrai	5913,1876	7
	faux		
sortie	2021		

2021 est la première année où le stock passe sous 6000 livres.

Exercice 3

1. Soit $I=[1,+\infty[$.

$\frac{1}{5}>0$, donc la fonction $x\mapsto\frac{1}{5}x+1$ est strictement croissante sur I.

La fonction u : $x\mapsto x-1$ est strictement croissante et positive sur I.

Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur I.

Donc la fonction $x\mapsto\sqrt{x-1}$ est strictement croissante sur I.

2. Si $x\geq 1$, alors $g(x)=\frac{1}{5}x+1\geq\frac{6}{5}$. La fonction g est strictement positive sur I.

3. Soit $P(x)=x^2-15x+50$.

Le discriminant vaut $15^2-200=25=5^2$.

Le polynôme P admet donc 2 racines :

$x_1=\frac{15+5}{2}=10$ et $x_2=\frac{15-5}{2}=5$.

x	1		5		10		$+\infty$
g(x)		+	0	-	0	+	

4. Pour tout $x\in I$, on a :

$$\sqrt{x-1}=\frac{1}{5}x+1$$

$$\Leftrightarrow x-1=\left(\frac{1}{5}x+1\right)^2 \quad \text{car } \frac{1}{5}x+1\geq 0 \text{ sur I}$$

$$\Leftrightarrow x-1=\frac{1}{25}(x+5)^2$$

$$\Leftrightarrow 25(x-1)=x^2+10x+25$$

$$\Leftrightarrow x^2-15x+50=0$$

5. $g(5)=2$ et $g(10)=3$, les points d'intersection de C et D sont A(5, 2) et B(10, 3).

6. Pour tout $x\in I$, on a :

$$\sqrt{x-1}>\frac{1}{5}x+1$$

$$\Leftrightarrow x-1>\left(\frac{1}{5}x+1\right)^2 \quad \text{car } \frac{1}{5}x+1\geq 0 \text{ sur I}$$

$$\Leftrightarrow x-1>\frac{1}{25}(x+5)^2$$

$$\Leftrightarrow 25(x-1)>x^2+10x+25$$

$$\Leftrightarrow x^2-15x+50<0$$

$$\Leftrightarrow 5<x<10$$

Sur $[1,5[\cup]10,+\infty[$, C est strictement au-dessous de D.

Sur $]5,10[$, C est strictement au-dessus de D.

C et D sont sécantes aux points d'abscisses 5 et 10.