Exercice 1

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE N
  POUR k ALLANT_DE 0 A N-1
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR 3*U-2*k+3
    FIN_POUR
  AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

On pose N = 3.

k		0	1	2
U	0	3	10	29

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. $u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 10$.

2. Soit la suite (v_n) définie, pour tout n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Pour tout n, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) + 1 \\ &= 3u_n - 2n + 3 - n \\ &= 3u_n - 3n + 3 \\ &= 3(u_n - n + 1) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

On en déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. $v_0 = u_0 + 1 = 1$

(v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$.

Ainsi, pour tout n, $v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$.

c. Pour tout n, $u_n = v_n + n - 1 = 3^n + n - 1$.

3. En programmant la suite, on trouve :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	29	84	247	734	2193	6568	19691	59058	177157

le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq 10^5$ est 11.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé : $A(2,2)$, $B(6,2)$, $C(6,4)$ et $D(2,4)$.

1. $\overrightarrow{BD}(-4,2)$ donc une équation cartésienne de (BD) est de la forme $2x+4y+c=0$. Or $B(6,2)$ est un point de (BD) donc $2\times 6+4\times 2+c=0$; $c=-20$. Une équation de (BD) est donc $2x+4y-20=0$

Une équation équivalente est : $x+2y-10=0$.

2. $M(m, y_M)$ est un point de (BD) donc d'après la première question : $m+2y_M-10=0$.

On en déduit que $y_M=\dfrac{10-m}{2}$. Ainsi $M\left(m, \dfrac{10-m}{2}\right)$.

3. Par définition de N, M = m[NC], d'où $\begin{cases} 2m=6+x_N \\ 10-m=4+y_N \end{cases}$, soit $N(2m-6, -m+6)$.

4. A et D ont même abscisse donc (AD) est parallèle à l'axe des ordonnées. Or (NP) est parallèle à (AD) donc (NP) est parallèle à l'axe des ordonnées et les points N et P ont même abscisse.
L'abscisse de P est donc $2m-6$.
(AB) a pour équation $y=2$ et P est sur (AB) donc P a pour ordonnée 2.

De même (NQ) est parallèle à (AB) qui est parallèle à l'axe des abscisses, donc N et Q ont même ordonnée. L'ordonnée de Q est donc $-m+6$.
Q est sur (AD) qui a pour équation $x=2$, donc l'abscisse de Q est 2.

Ainsi $P(2m-6,2)$ et $Q(2,6-m)$.

5. D'après 2 et 4 : $\overrightarrow{MP}\left(2m-6-m, 2-\dfrac{10-m}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{MP}\left(m-6, \dfrac{m-6}{2}\right)$,

et $\overrightarrow{PQ}(2-2m+6, 6-m-2)$; $\overrightarrow{PQ}(2(4-m), 4-m)$

$$\det(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{PQ})=(m-6)\times(4-m)-2(4-m)\times\left(\frac{m-6}{2}\right)=0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires, les points M, P et Q sont alignés.

Exercice 3

1. $PM=\sqrt{(x_M-x_P)^2+(y_M-y_P)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(\sqrt{x})^2}$
2. $PM=\sqrt{x^2-12x+36+x}=\sqrt{x^2-11x+36}$
3. a) La fonction u est une fonction du type $u(x)=ax^2+bx+c$ avec $a>0$ et $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{11}{2}$.

   On en déduit le tableau de variations de u sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	11/2	$+\infty$
u(x)	$\searrow$	$\dfrac{23}{4}$	$\nearrow$

b) la fonction f correspond à $\sqrt{u}$. Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations, donc f a les mêmes variations que la fonction u sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de f sur I :

x	0	$11/2$	$+\infty$
f(x)	6 ↘	$\dfrac{\sqrt{23}}{2}$	↗

c) La distance minimale de PM est donc de $\dfrac{\sqrt{23}}{2}$.

4. a) $\Delta = 11^2 - 4\times 20 = 41$, les racines du polynôme $P(x) = x^2 - 11x + 20$ sont :

$x_1 = \dfrac{11-\sqrt{41}}{2} \approx 2,3$ et $x_2 = \dfrac{11+\sqrt{41}}{2} \approx 8,7$.

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
P(x)		+	0	-	0	+	

Donc $S = [0, x_1[\cup]x_2, +\infty[$.

b) Pour tout $x \in I$, on a :

$PM > 4$

$\Leftrightarrow PM^2 > 16$

$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 36 > 16$

$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 20 > 0$

$\Leftrightarrow x \in S$

L'ensemble des valeurs correspondant donc à l'ensemble des solutions trouvé à la question précédente.