Exercice 1

Soit V la fonction qui à x associe le volume V(x) de la boîte.

1. La fonction V est définie sur l'intervalle $I = [0,3]$.
2. Pour tout x de I, $V(x) = x(6-2x)^2 = x(4x^2 - 24x + 36) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$.
3. Pour tout x de I, $V'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x^2 - 4x + 3) = 12(x-1)(x-3)$.

Tableau de variations de V sur I :

x	0		1		3
V'(x)		+	0	–	0
V(x)	0	↗	16	↘	0

4. Au vu du tableau, le volume de la boîte est maximal pour x = 1.

Exercice 2

Une urne contient 10 boules blanches et n boules noires, où $n \in \mathbb{N}^*$.
Une expérience consiste à piocher au hasard une boule dans l'urne, noter sa couleur, la remettre dans l'urne et piocher une seconde boule.
On associe à cette expérience la variable aléatoire X donnant le nombre de boules blanches.

1. Soit Ω l'univers des possibles.
$X(\Omega) = \{0,1,2\}$
2. Dans cette question n = 4.

a. $\text{card}\Omega = 14^2 = 196$. Ω est muni de l'équiprobabilité.
Déterminons la loi de probabilité de X.

$P(X=0) = \dfrac{4\times 4}{196} = \dfrac{16}{196} = \dfrac{4}{49}$ les deux boules sont noires

$P(X=1) = \dfrac{10\times 4 + 4\times 10}{196} = \dfrac{80}{196} = \dfrac{20}{49}$ une boule est noire, l'autre est blanche

$P(X=2) = \dfrac{10\times 10}{196} = \dfrac{100}{196} = \dfrac{25}{49}$ les deux boules sont blanches

b. $E(X) = 1\times\dfrac{20}{49} + 2\times\dfrac{25}{49} = \dfrac{70}{49} = \dfrac{10}{7}$.

3. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

k	0	1	2
P(X=k)	$\dfrac{9}{64}$	$\dfrac{30}{64}$	$\dfrac{25}{64}$

On a : $P(X=2) = \dfrac{10^2}{(10+n)^2} = \dfrac{25}{64} = \left(\dfrac{5}{8}\right)^2$, on en déduit que $\dfrac{10}{10+n} = \dfrac{5}{8}$, ce qui amène $80 = 50 + 5n$, soit $5n = 30$, d'où n = 6.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+12}{x^2+8}$.

1. f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition.
Pour tout x, on a :

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x^2+8)-(x^2-4x+12)(2x)}{(x^2+8)^2}=\frac{2x^3-4x^2+16x-32-2x^3+8x^2-24x}{(x^2+8)^2}$$

$$=\frac{4x^2-8x-32}{(x^2+8)^2}=\frac{4(x^2-2x-8)}{(x^2+8)^2}$$

2. Pour tout x, $f'(x)$ est du signe de x^2-2x-8.
Pour tout x, $x^2-2x-8=(x-1)^2-3^2=(x-4)(x+2)$.

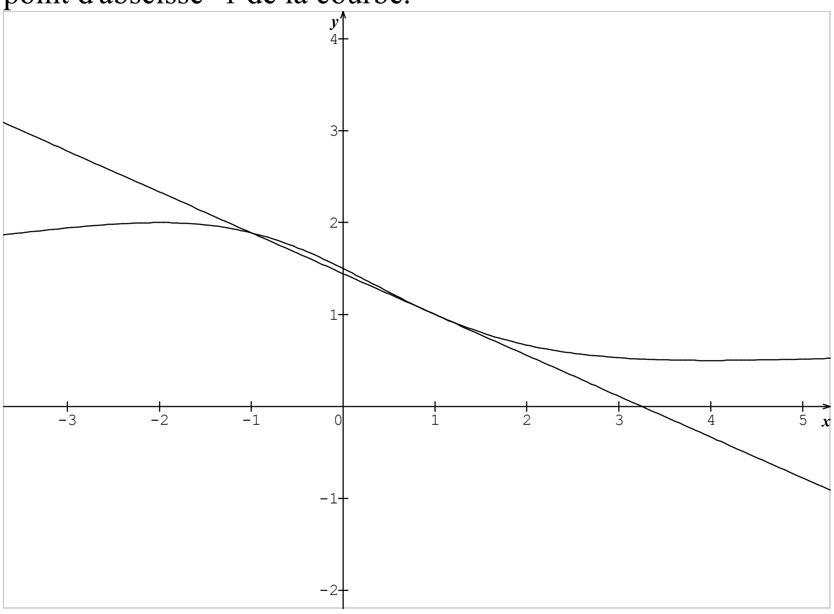
x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	0	+	

3. Les variations de f sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	1/2	$\nearrow$	

4. $f(1)=1$ et $f'(1)=-\dfrac{4}{9}$, une équation de la tangente T au point d'abscisse 1 est $y=f'(1)(x-1)+f(1)$, soit $y=-\dfrac{4}{9}(x-1)+1$, ou encore $y=-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{13}{9}$.

5. Le point d'abscisse -1 de T a pour ordonnée $y=\dfrac{17}{9}$, et $f(-1)=\dfrac{17}{9}$; donc T passe par le point d'abscisse -1 de la courbe.



Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\,\vec{u}.\vec{v}$$

2. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\,\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{u}\|^2+\|\overrightarrow{-v}\|^2+2\,\vec{u}.(\overrightarrow{-v})\\ &= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\,\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\,\vec{u}.\vec{v}\\ &= 2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)\end{aligned}$$

Les trois questions qui suivent sont indépendantes.

3. Exemple d'application 1.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=\frac{4}{3}$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\frac{5}{3}$.

On a : $2\,\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=\frac{25}{9}-1-\frac{16}{9}=0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

4. Exemple d'application 2.

Soit ABCD un parallélogramme. On suppose que $AB=5$, $AD=7$ et $BD=12$. Calculons AC.

On a : $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2+\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\|^2=2\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AD}\|^2\right)$, soit $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$, ce qui amène $AC^2=2AB^2+2AD^2-BD^2=50+98-144=4$, d'où AC = 2.

En fait, si on remarque que ce parallélogramme est aplati, alors la réponse devient évidente.

5. Exemple d'application 3.

Soit ABCD un parallélogramme. On suppose que $AB=\sqrt{5}$, $AD=6$ et $AC=\sqrt{41}$.

On a : $2\,\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$, soit $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AC^2-AB^2-AD^2=41-5-36=0$, donc ABCD est un rectangle.

On peut aussi utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.