Exercice 1

1. $\overrightarrow{EA}(6,-2)$, $\overrightarrow{EB}(6,3)$, donc $EA=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ et $EB=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EA}=EB\times EA\times\cos\theta=2\sqrt{10}\times 3\sqrt{5}\times\cos\theta=30\sqrt{2}\cos\theta$

2. $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EA}=6\times 6-2\times 3=30$

3. D'où $30=30\sqrt{2}\cos\theta$, soit $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Il s'ensuit que $\theta=45°$.

4. a. $\overrightarrow{EB}$ est un vecteur normal de (AH).
Une équation cartésienne de (AH) est $2x+y+c=0$, or $A\in(AH)$, donc c = - 12.
Une équation cartésienne de (AH) est $2x+y-12=0$.

b. $\overrightarrow{EB}$ est un vecteur directeur de (EB).
Une équation cartésienne de (EB) est $x-2y+d=0$, or $E\in(EB)$, donc d = 4.
Une équation cartésienne de (EB) est $x-2y+4=0$.

c. Les coordonnées de H vérifient le système $\begin{cases}2x+y=12\\x-2y=-4\end{cases}$. On a :

$$\begin{cases}2x+y=12\\x-2y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=12-2x\\5x=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=4\end{cases}$$

Les coordonnées de H sont $(4,4)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur [-7, 7] par $f(x)=\dfrac{5x-12}{x^2+1}$.

1. Pour tout $x\in[-7,\ 7]$,

$$f'(x)=\frac{5(x^2+1)-(5x-12)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{5x^2+5-10x^2+24x}{(x^2+1)^2}=\frac{-5x^2+24x+5}{(x^2+1)^2}.$$

2. Le signe de f '(x) est celui du polynôme $-5x^2+24x+5$. Le discriminant vaut 26^2, les racines du polynôme sont 5 et -1/5.

x	-7		-1/5		5		7
f '(x)		-	0	+	0	-	

3. Tableau de variations de f :

x	-7		-1/5		5		7
f ' (x)		-	0	+	0	-	
f (x)	-0,94	$\searrow$	-12,5	$\nearrow$	1/2	$\searrow$	0,46

4. Au vu du tableau, l'équation f(x) = 0,48 admet deux solutions sur I.

Exercice 3

1. D'après la forme canonique, le sommet de la parabole est le point de coordonnées (2, 1).
2. Pour tout $x \in [1,3]$, $f'(x) = -2x + 4$.
3. a. f(1) = 0 et f '(1) = 2, une équation de T_1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit y = 2(x – 1).

b. Une équation de T_a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, soit $y = (4-2a)(x-a) - a^2 + 4a - 3$, ce qui donne $y = (4-2a)x + a^2 - 3$.

4. Le point O(0,0) appartient à T_a si et seulement si $a^2 - 3 = 0$.
5. Or $a \in [1,3]$, ainsi la tangente au point d'abscisse $\sqrt{3}$ passe par l'origine.

Le point le plus haut visible par un observateur situé en O est le point de coordonnées $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$, soit $(\sqrt{3}, 4\sqrt{3} - 6)$.

Exercice 4

1. Pour tout x, on a :

$\sin x = \frac{1}{2} = \sin(\pi/6)$

$\Leftrightarrow x = \pi/6[2\pi]$ ou $x = \pi - \pi/6[2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \pi/6[2\pi]$ ou $x = 5\pi/6[2\pi]$

Pour tout x, on a :

$\sin(x + \pi/4) = \frac{1}{2} = \sin(\pi/3)$

$\Leftrightarrow x + \pi/4 = \pi/6[2\pi]$ ou $x + \pi/4 = 5\pi/6[2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \pi/6 - \pi/4[2\pi]$ ou $x = 5\pi/6 - \pi/4[2\pi]$

$\Leftrightarrow x = -\pi/12[2\pi]$ ou $x = 7\pi/12[2\pi]$

Donc $S \cap [0, 2\pi] = \{7\pi/12,\ 23\pi/12\}$

2. Pour tout x, on a :

$2\sin^2 t - 3\sqrt{3}\sin t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin t \\ 2X^2 - 3\sqrt{3}X + 3 = 0 \end{cases}$ Δ = 3, d'où X = $\sqrt{3}/2$ ou X = $\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin t = \sqrt{3}/2$ la valeur $\sqrt{3}$ ne convient pas

$\Leftrightarrow t = \pi/3[2\pi]$ ou $x = 2\pi/3[2\pi]$

$S \cap]-\pi, \pi] = \{\pi/3, 2\pi/3\}$