Exercice 1

Déterminer le ou les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable et calculer f '(x).

a) $f(x) = x^4 - 3x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 - 3$

b) $f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^2}$

c) $f(x) = (1 + x^2)\left(2x^3 + 5\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x(2x^3 + 5) + 6x^2(1 + x^2) = 4x^4 + 10x + 6x^2 + 6x^4 = 10x^4 + 6x^2 + 10x$.

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x^2 + 3 - 2x^2}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2}$.

e) $f(x) = (2x + 1)^3$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3(2x + 1)^2 \times 2 = 6(2x + 1)^2$.

f) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(6x - 2)(x^2 + x + 2) - (2x + 1)(3x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + x + 2)^2} = \frac{6x^3 + 4x^2 + 10x - 4 - (6x^3 - x^2 + 1)}{(x^2 + x + 2)^2} = \frac{5x^2 + 10x - 5}{(x^2 + x + 2)^2}.$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.
2. Signe de f '(x) :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	0	+	

3. Tableau de variations de la fonction f :

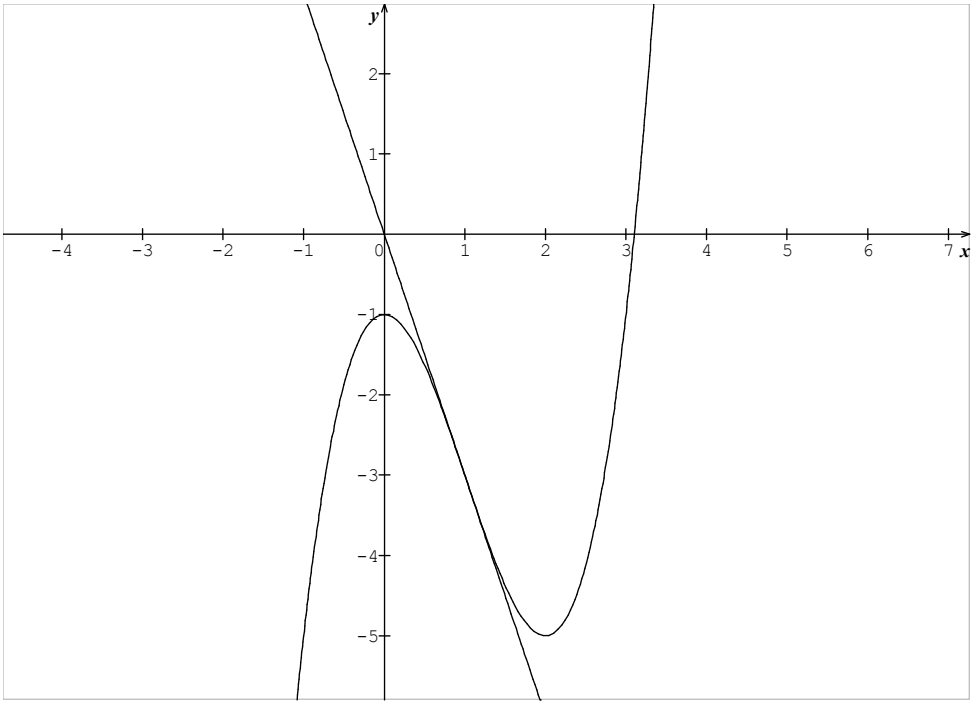
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f ' (x)		+	0	−	0	+	
f (x)		↗	-1	↘	-5	↗	

4. Equation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

On a : $f(1) = -3$ et $f'(1) = -3$.

Une équation de T est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = -3(x - 1) - 3$, ou encore $y = -3x$.

5. Courbe



Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.
2. Soit T_m la tangente au point d'abscisse m.

On a : $f(m)=\dfrac{1}{m}-1$ et $f'(m)=-\dfrac{1}{m^2}$.

Une équation de T_m est $y=f'(m)(x-m)+f(m)$, soit $y=-\dfrac{1}{m^2}(x-m)+\dfrac{1}{m}-1$, ou encore

$y=-\dfrac{1}{m^2}x+\dfrac{2}{m}-1$.

3. Pour tout $m\neq 0$, on a :

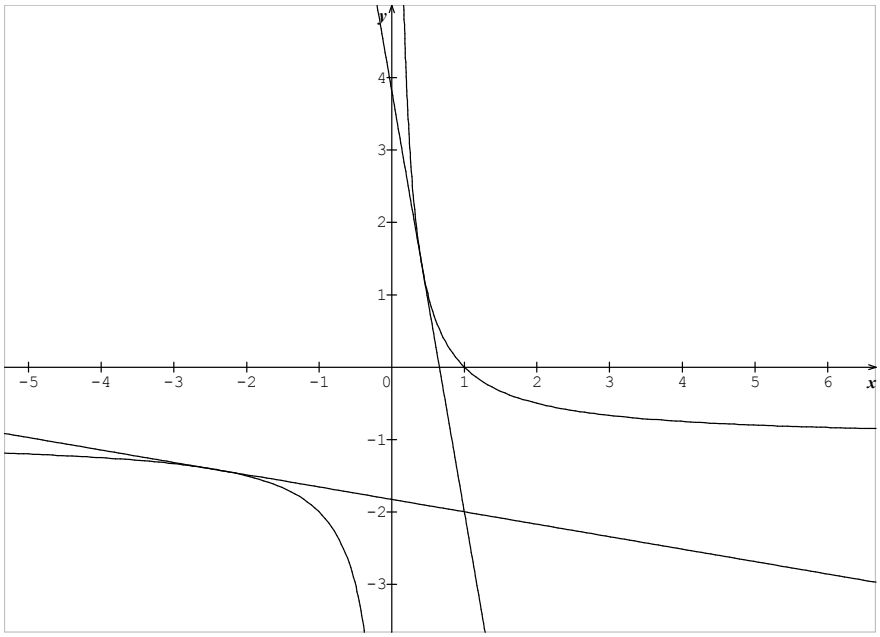
$P(1,-2)\in T_m$

$\Leftrightarrow -2=-\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{2}{m}-1$

$\Leftrightarrow 0=-\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{2}{m}+1$

$\Leftrightarrow 0=\dfrac{-1+2m+m^2}{m^2}$

$\Leftrightarrow 0=m^2+2m-1$

$\Leftrightarrow (m+1)^2-2=0$

$\Leftrightarrow m=-1\pm\sqrt{2}$