Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x + 25$.

1. Etudier les variations de f et donner son tableau de variations.
2. Graphiquement, combien l'équation f(x) = 0 admet-t-elle de solutions ?
3. A l'aide de la calculatrice, donner pour chaque racine un encadrement de largeur 10^{-3}.

Exercice 2

Soit $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. Montrer que, pour tout x, $f(x) = 3 + \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.
2. Calculer la fonction dérivée f ' et montrer que, pour tout x, $f'(x) = -4\dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$.
3. Justifier le signe de f '(x). Dresser le tableau de variations.
4. Montrer qu'une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 est $y = 4x + 3$.
5. Etudier la position de la courbe par rapport à cette tangente T.
6. Montrer que le point I(0, 3) est un centre de symétrie pour la courbe.

Exercice 3

Un cylindre est inscrit dans une sphère de centre O et de rayon R. Sa hauteur h et le rayon r de son cercle de base sont variables.

1. a) Montrer que $R^2 = r^2 + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2$.

   b) Quel est l'ensemble I des valeurs que peut prendre h ?

   c) Démontrer que le volume V(h) du cylindre est donné par : $V(h) = \pi h\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)$

2. a) Etudier les variations de V sur I

   b) En déduire qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cylindre maximal.

   c) Conclure que le volume maximal est égal au volume de la boule divisé par $\sqrt{3}$.