Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x + 25$.

1. Pour tout x, $f'(x) = -3x^2 + 18x - 27 = -3(x^2 - 6x + 9) = -3(x-3)^2$.

x	$-\infty$	0	3	4	$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$-$	
f (x)	$+\infty$	25	-2		$-\infty$

2. Graphiquement, l'équation f(x) = 0 admet une seule solution α.
3. On a : $f(1{,}740) \approx 0{,}000376$ et $f(1{,}741) \approx -0{,}00438$, donc $1{,}740 < \alpha < 1{,}741$.

Exercice 2

Soit $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité 2cm).

1. Pour tout x, $f(x) = \dfrac{3(x^2+1) + 4x}{x^2+1} = 3 + \dfrac{4x}{x^2+1}$.

2. f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition. Pour tout x, on a :

$$f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 2x(4x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2+1)^2} = -4\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}.$$

3. Pour tout x, f '(x) est du signe de -(x-1)(x+1).

Les variations de f sont résumées dans le tableau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	0	-	
f (x)	3	↘	1	↗	5	↘	3

4. $f(0) = 3$ et $f'(0) = 4$, une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est $y = 4x + 3$.

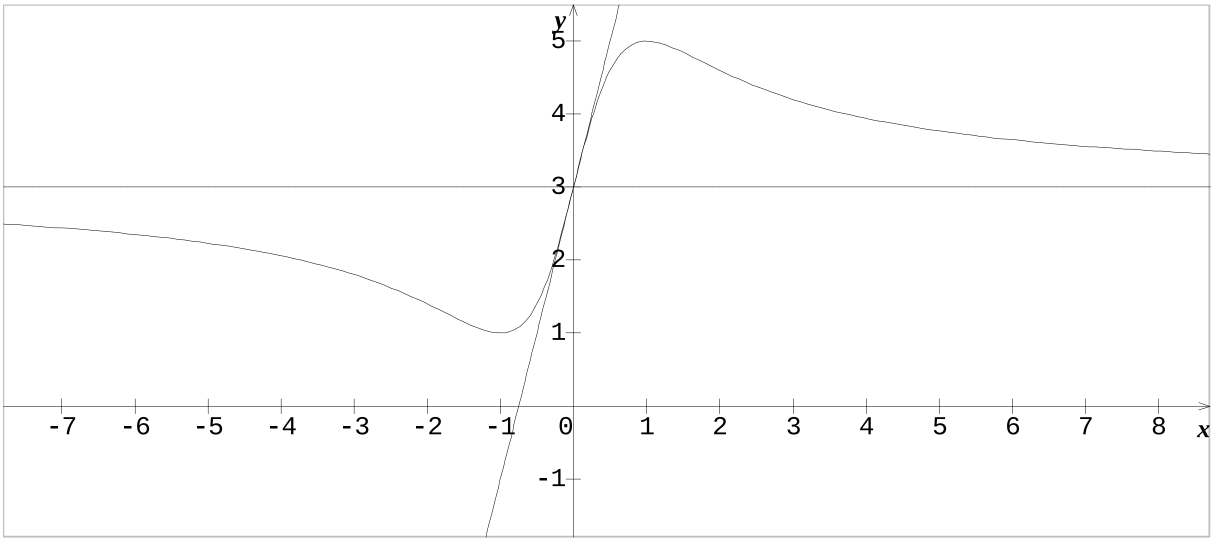
5. Pour tout x, on a : $f(x) - (4x+3) = \dfrac{4x}{x^2+1} - 4x = \dfrac{-4x^3}{x^2+1}$.

Si x > 0, $f(x) - (4x+3) < 0$, C_f est strictement au-dessous de T.

Si x < 0, $f(x) - (4x+3) > 0$, C_f est strictement au-dessus de T.

6. Pour tout x, $f(x) + f(-x) = 3 + \dfrac{4x}{x^2+1} + 3 - \dfrac{4x}{x^2+1} = 6$.

Le point I(0, 3) est donc un centre de symétrie pour la courbe.



Exercice 3

1. a) Avec le théorème de Pythagore : $R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$, d'où le résultat.

b) h prend ses valeurs dans I = [0, 2R].

c) Le volume V(h) du cylindre est donné par :

$$V(h) = \pi r^2 h = \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right).$$

3. a) Pour tout $h \in I$,

$$V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \pi h \times \left(-\frac{h}{2}\right) = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = \pi\left(R - \frac{\sqrt{3}h}{2}\right)\left(R + \frac{\sqrt{3}h}{2}\right).$$

Tableau de variations

h	0		$2R/\sqrt{3}$		2R
V'(h)		+	0	–	0
V(h)	0	↗		↘	0

b) Au vu du tableau de variations, $V(2R/\sqrt{3})$ est la valeur maximale.

c) On a : $V(2R/\sqrt{3}) = \pi\frac{2R}{\sqrt{3}}\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right) = \pi\frac{4R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} V_{boule}$.