Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 3$.

1. Pour tout x, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$	-3	-1		1		$+\infty$
f ' (x)		+	0	-	0	+	
f (x)		-15 ↗	5	↘	1	↗	

2. Graphiquement, l'équation f(x) = 0 admet une seule solution α.

3. On a : $f(-2,104) \approx -0,002$ et $f(-2,103) \approx 0,008$, donc $-2,104 < \alpha < -2,103$.

Exercice 2

Soit $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2 - x + 1}$ et C sa courbe représentative.

1. Le discriminant de $x^2 - x + 1$ vaut -3, donc, pour tout x, $x^2 - x + 1 > 0$. $D_f = \mathbb{R}$.

2. f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition. Pour tout x, on a :
$$f'(x) = \frac{-(x^2 - x + 1) - (1-x)(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

3. Pour tout x, f '(x) est du signe de x(x – 2).

Les variations de f sont résumées dans le tableau.

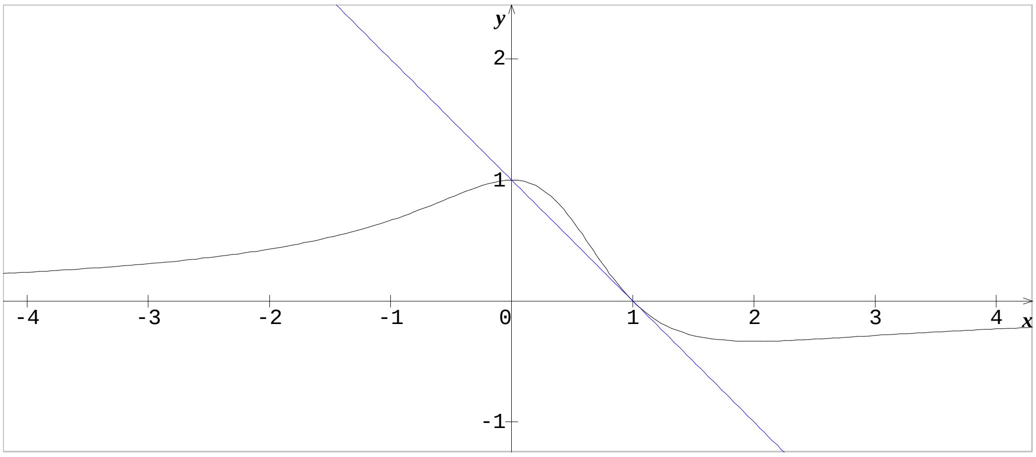
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f ' (x)		+	0	-	0	+	
f (x)	0	↗	1	↘	-1/3	↗	0

4. $f(1) = 0$ et $f'(1) = -1$, une équation de la tangente T_1 au point d'abscisse 1 est $y = -x + 1$.

5. Pour tout x, on a : $f(x) - (-x+1) = \dfrac{1-x}{x^2 - x + 1} + x - 1 = \dfrac{(1-x)(-x^2 + x)}{x^2 - x + 1} = \dfrac{x(1-x)^2}{x^2 - x + 1}$.

Si $x \geq 0$, $f(x) - (-x+1) \geq 0$, C est au-dessus de T_1.

Si $x \leq 0$, $f(x) - (-x+1) \leq 0$, C est au-dessous de T_1.



Exercice 3

Soit C un cône de hauteur 4 cm et de rayon 2 cm.
C' est un cylindre de hauteur h et de rayon r inscrit dans C.

1. h décrit l'intervalle $I = [0,\ 4]$
2. D'après Thalès, $\frac{4-h}{r} = \frac{4}{2}$, d'où $h = 4 - 2r$.
3. Pour tout $h \in I$, $V(h) = \pi r^2 h = \pi h \left(\frac{4-h}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} h(4-h)^2$.
4. Pour tout $h \in I$, $V'(h) = \frac{\pi}{4}\left[(4-h)^2 - 2h(4-h)\right] = \frac{\pi}{4}(4-h)(4-3h)$.
5. Variations de V sur I.

h	0		4/3		4
V'(h)		+	0	–	0
V(h)			$64\pi/27$		
	0	↗		↘	0

6. La valeur du volume maximal de C' est $64\pi/27$.