

Exercice 1

1. Montrer que, pour tous a et b réels, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.
2. Montrer que, pour tous a et b réels, $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}$.
3. En déduire que, pour tous a et b réels, $a^2+ab+b^2\geq 0$, l'égalité n'ayant lieu que si $a=b=0$.
4. En utilisant ces résultats, montrer que $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit $f(x)=|x-3|+|x+5|$.

1. Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue.
2. Résoudre $f(x)<10$.

Exercice 3

Soit $u(x)=4x-x^2$, $f(x)=\sqrt{u(x)}$ et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Justifier que $D_f=[0, 4]$.
2. Faire le tableau de variations de u sur $[0, 4]$.
3. En déduire celui de f sur $[0, 4]$.
4. Soit $A(2, 0)$ et M le point d'abscisse x de C_f , montrer que $AM=2$. Que peut-on en déduire pour C_f .

Exercice 4

Soit $f(x)=\frac{x^2-5x+5}{x-3}$ et C sa courbe représentative.

1. Vérifier que, pour tout $x \neq 3$, $f(x)=x-2-\frac{1}{x-3}$.
2. Montrer que, sur $]3, +\infty[$, f est la somme de 2 fonctions strictement croissantes.
En déduire les variations de f sur cet intervalle.
3. Pour tout $x \neq 0$, calculer $f(3+x)+f(3-x)$. En déduire que le point $I(3, 1)$ est un centre de symétrie pour la courbe.
4. Etudier le signe de $f(x)-(x-2)$. En déduire les positions relatives de la courbe C et de la droite D d'équation $y=x-2$.
5. Faire le tableau de variations de f .