**Exercice 1**

1. Pour tous a et b réels, on a :
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3=a^3-b^3$.
2. Pour tous a et b réels, on a :
$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}=a^2+ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}=a^2+ab+b^2.$$
3. On en déduit que, pour tous a et b réels, $a^2+ab+b^2\geq 0$, car $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2$ et $\frac{3b^2}{4}$ sont positifs.

L'égalité n'ayant lieu que si $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2$ et $\frac{3b^2}{4}$ sont nuls, soit pour $b=0$ et $a=0$.

4. Pour tous x, $x'\in\mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} x<x' &\Rightarrow x-x'<0 \text{ et } x^2+xx'+x'^2>0 \\ &\Rightarrow (x-x')(x^2+xx'+x'^2)<0 \\ &\Rightarrow x^3-x'^3<0 \\ &\Rightarrow f(x)<f(x') \end{aligned}$$
Donc $f:x\mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 2**

Soit $f(x)=|x-3|+|x+5|$.

1. Ecrivons f(x) sans valeur absolue.

| $x$ | $-\infty$ | | -5 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|x-3\|$ | | 3-x | | 3-x | 0 | x-3 | |
| $\|x+5\|$ | | -x-5 | 0 | x+5 | | x+5 | |
| $f(x)$ | | -2x-2 | 8 | 8 | 8 | 2x+2 | |

2. On a : $2x+2=10\Leftrightarrow x=4$ et $-2x-2=10\Leftrightarrow x=-6$.
On en déduit que : $f(x)<10\Leftrightarrow -6<x<4$.

**Exercice 3**

Soit $u(x)=4x-x^2$, $f(x)=\sqrt{u(x)}$ et $C_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Pour tout x, on a : $4x-x^2=x(4-x)\geq 0\Leftrightarrow x\in[0,4]$. Donc $D_f=[0,\ 4]$.
2. La représentation graphique de u est une parabole de sommet $\Omega(2,4)$.

Tableau de variations de u.

| x | 0 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| u (x) | 0 | ↗ | 4 | ↘ | 0 |

3. Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur $[0,\ 4]$.

Tableau de variations de f.

| x | 0 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| f (x) | 0 | ↗ | 2 | ↘ | 0 |

4. Soit A(2, 0) et M le point d'abscisse x de $C_f$. Pour tout $x \in [0, 4]$, on a :

$AM^2 = (x-2)^2 + (4x - x^2) = x^2 - 4x + 4 + 4x - x^2 = 4$.

Donc $C_f$ est un demi-cercle de centre A et de rayon 2..

**Exercice 4**

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 5}{x-3}$ et C sa courbe représentative.

1. Pour tout $x \neq 3$, $x - 2 - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{(x-2)(x-3)-1}{x-3} = \dfrac{x^2-5x+5}{x-3} = f(x)$.
2. La fonction $x \mapsto x-2$ est strictement croissante sur $]3, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x-3$ est strictement positive et strictement croissante sur $]3, +\infty[$, donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$ est strictement décroissante sur $]3, +\infty[$, et la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x-3}$ est strictement croissante sur $]3, +\infty[$.

Ainsi f est strictement croissante sur $]3, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur cet intervalle.

3. Pour tout $x \neq 0$, on a : $f(3+x) + f(3-x) = x + 1 - \dfrac{1}{x} - x + 1 + \dfrac{1}{x} = 2$.

On en déduit que le point I(3, 1) est un centre de symétrie pour la courbe.

4. Pour tout $x \neq 3$, $f(x) - (x-2) = -\dfrac{1}{x-3}$.

Si $x > 3$, $f(x) - (x-2) < 0$, C est strictement au-dessous de D.

Si $x < 3$, $f(x) - (x-2) > 0$, C est strictement au-dessus de D.

5. Tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |