Exercice 1

a) $|x-1|=|2x+3|$

$\Leftrightarrow 2x+3=x-1$ ou $2x+3=-x+1$

$\Leftrightarrow x=-4$ ou $3x=-2$

$\Leftrightarrow x=-4$ ou $x=-2/3$

b) $|2x-1|\geq 3$

$\Leftrightarrow 2x-1\geq 3$ ou $2x-1\leq -3$

$\Leftrightarrow x\geq 2$ ou $x\leq -1$

Exercice2

Soit $f(x)=|4-x|-|2x+4|+x$.

x	$-\infty$	-2		4		$+\infty$
$\lvert 4-x\rvert$	4-x		4-x	0	x-4	
$-\lvert 2x+4\rvert$	2x+4	0	-2x-4		-2x-4	
$f(x)$	2x+8	4	-2x	-8	-8	

On a : $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$ et $-2x=0 \Leftrightarrow x=0$.
On en déduit que : $f(x)>0 \Leftrightarrow -4<x<0$.

Exercice 3

Soit f et g deux fonctions croissantes et positives sur l'intervalle I.
Pour tous x et $x'\in I$, on a :

$$x\leq x' \Rightarrow \begin{cases} 0\leq f(x)\leq f(x') & \text{car f est croissante et positive sur I} \\ 0\leq g(x)\leq g(x') & \text{car g est croissante et positive sur I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)g(x)\leq f(x')g(x')$$

Donc la fonction $f\times g$ est croissante sur I.
On rappelle que si b, c et d sont positifs, alors $a\leq b$ et $c\leq d \Rightarrow ac\leq bd$.

Exercice 4

Soit $f(x)=\dfrac{x^2-4x-1}{1-x}$ et C sa courbe représentative.

1. Pour tout $x\neq 1$, $-x+3+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{(-x+3)(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{-x^2+4x+1}{x-1}=f(x)$.

2. La fonction $x\mapsto -x+3$ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

La fonction $x\mapsto x-1$ est strictement positive et strictement croissante sur $]1,+\infty[$, donc la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, et la fonction $x\mapsto \dfrac{4}{x-3}$ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur cet intervalle.

3. Pour tout $x\neq 0$, on a : $f(1+x)+f(1-x)=-x+2+\dfrac{4}{x}+x+2-\dfrac{4}{x}=2\times 2$.

On en déduit que le point I(1, 2) est un centre de symétrie pour la courbe.

4. Pour tout $x \neq 1$, $f(x)-(-x+3)=\dfrac{4}{x-1}$.

Si $x<1$, $f(x)-(-x+3)<0$, C est strictement au-dessous de D.

Si $x>1$, $f(x)-(-x+3)>0$, C est strictement au-dessus de D.

5. Tableau de variations.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

Exercice 5

Soit $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$ et C sa courbe représentative.

1. f est définie si et seulement si $x^2+2x \geq 0$.

On a : $x^2+2x=x(x+2)$. Ainsi : $x^2+2x \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$.

Donc $D_f =]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$.

2. Pour tout $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(-1+x) &= \sqrt{(x-1)^2+2(x-1)} \\ &= \sqrt{x^2-1} \\ &= f(-1-x). \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Donc l'axe d'équation x = -1 est une axe de symétrie pour C.

3. Soit g : $x \mapsto x^2+2x$. Pour tout x, $g(x)=(x+1)^2-1$.

La fonction g est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$.

4. La fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $[0,+\infty[$.

g et $f=\sqrt{g}$ ont les mêmes variations sur $[0,+\infty[$.

6. Pour tout $x \geq 0$, $f(x)=\sqrt{(x+1)^2-1} \leq \sqrt{(x+1)^2} = x+1$.

7. Courbe pour $x \geq 0$.