Exercice 1. $S_1 = 7+13+19+...+85+91$ est la somme de termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison 6. On a : $91 = 7+14\times 6$. La somme comporte donc 15 termes.

On en déduit : $S_1 = \dfrac{(91+7)\times 15}{2} = 735$.

$S_2 = 1-2+4-8+16-...+16384$ est la somme de termes consécutifs d'une progression géométrique de raison -2. On a : $16384 = (-2)^{14}$. La somme comporte donc 15 termes.

On en déduit : $S_2 = \dfrac{1-(-2)^{15}}{1-(-2)} = 10923$.

Exercice 2. Soit n le numéro de la dernière page, alors $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2} = 179700$.

On a :

$\dfrac{n(n+1)}{2} = 179700$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 359400 = 0$, $\Delta = 1199^2$

$\Leftrightarrow n = 599$ ou $n = -600$

Seul n = 599 convient.

Exercice 3. La population mondiale augmente de 1% par an. En 2010, elle était de 6,9 milliards. On note u_n la population mondiale l'année 2010 + n.

1. Pour tout n, $u_n = 6,9\times(1,01)^n$ (en milliards).
2. On peut estimer la population en 2025 à $u_{15} = 6,9\times(1,01)^{15} \approx 8$ milliards .
3. On a : $u_{26} < 9 < u_{27}$, on peut estimer que les 9 milliards seront atteints en 2037.

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n, $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 31, u_2 = 331$ et $u_3 = 3331$.
2. On pose, pour tout n, $v_n = u_n + \dfrac{7}{3}$.

Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} + \dfrac{7}{3} = 10u_n + \dfrac{7}{3} + 21 = 10u_n + \dfrac{70}{3} = 10\left(u_n + \dfrac{7}{3}\right) = 10v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 10 et de premier terme $v_0 = u_0 + \dfrac{7}{3} = \dfrac{10}{3}$.

3. On en déduit que, pour tout n, $v_n = \dfrac{10}{3}\times 10^n = \dfrac{10^{n+1}}{3}$, $u_n = v_n - \dfrac{7}{3} = \dfrac{10^{n+1}-7}{3}$.

Exercice 5. Pour construire un château de cartes de p étages, il faut u_n cartes au nième étage, avec $1 \le n \le p$.

1. Le premier étage est constitué de V renversés (2cartes) au nombre de p, plus p – 1 cartes qui les recouvrent, soit au total 3p – 1 cartes.
2. Il est immédiat que pour passer d'un étage à l'étage supérieur, on enlève 3 cartes, soit $u_{n+1} = u_n - 3$.

La suite (u_n) est arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_1 = 3p-1$, d'où, pour tout $n \le p$, $u_n = 3p-1-3(n-1) = 3(p-n)+2$.

3. On a : $S_p = u_1 + u_2 + ... + u_p = \dfrac{p(3p-1+2)}{2} = \dfrac{p(3p+1)}{2}$ cartes nécessaires pour les p étages.
4. On a : $S_5 = 40$ et $S_6 = 57$, on peut donc faire 5 étages avec un jeu de 52 cartes ?