Exercice 1. $S_1 = 10 + 12 + 14 + ... + 2014$ est la somme de termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison 2. On a : $2014 = 10 + 2 \times 1002$. La somme comporte donc 1003 termes.

On en déduit : $S_1 = \dfrac{(2014 + 10) \times 1003}{2} = 1015036$.

$S_2 = 2 + 6 + 18 + ... + 39366$ est la somme de termes consécutifs d'une progression géométrique de raison 3. On a : $39366 = 2 \times 19683 = 2 \times 3^9$. La somme comporte donc 10 termes.

On en déduit : $S_2 = 2\dfrac{1 - 3^{10}}{1 - 3} = 59048$.

Exercice 2. Soit a le premier terme et r la raison d'une progression arithmétique de 4 termes tels que la somme des deux premiers termes soit 998 et que la somme des deux derniers termes soit 2014.

On a donc $a + a + r = 998$ et $a + 2r + a + 3r = 2014$, soit $2a + r = 998$ et $2a + 5r = 2014$.

$$\begin{cases} 2a + 5r = 2014 \\ 2a + r = 998 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4r = 1016 \\ 2a + r = 998 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 372 \\ r = 254 \end{cases}$$

Les 4 termes de la suite sont : 372, 626, 880 et 1134.

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. On pose, pour tout n, $v_n = u_n + 1$.

Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 2$.

2. On en déduit que, pour tout n, $v_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$, $u_n = v_n - 1 = 2^{n+1} - 1$.

3. On a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{20} v_i = 2\frac{1 - 2^{21}}{1 - 2} = 2(2^{21} - 1) = 2^{22} - 2 = 4194302$.

4. On a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{20} u_i = \sum_{i=0}^{20} (v_i - 1) = \sum_{i=0}^{20} v_i - 21 = 4194281.$

Exercice 4. Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 + 2U_n}$.

On admet que, pour tout $n \geq 0$, $U_n > 0$.

1. $U_1 = \dfrac{1}{4}$, $U_2 = \dfrac{1}{6}$.

2. On définit la suite $\left(V_n\right)$ par $V_n = \dfrac{1}{U_n} + 1$ pour $n \geq 0$.

Pour tout n, $V_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1}} + 1 = \dfrac{1 + 2U_n}{U_n} + 1 = \dfrac{1}{U_n} + 3 = V_n + 2$.

La suite (V_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $V_0 = 3$.

3. On en déduit que, pour tout n, $V_n = V_0 + 2n = 3 + 2n$.

4. De là, pour tout n, $U_n = \dfrac{1}{V_n - 1} = \dfrac{1}{2 + 2n}$.

5. Pour tout n, $S_n = \dfrac{(n+1)(V_0 + V_n)}{2} = \dfrac{(n+1)(3 + 3 + 2n)}{2} = (n+1)(3+n)$.