Exercice 1

a) Pour tout x, on a :

$2\cos x+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos(5\pi/6)$

$\Leftrightarrow x=\pm 5\pi/6\left[2\pi\right]$

$S\cap\left[0,2\pi\right[=\left\{\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right\}$

b) Pour tout x, on a :

$\cos 2x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\cos(3\pi/4)$

$\Leftrightarrow 2x=\pm 3\pi/4\left[2\pi\right]$

$\Leftrightarrow x=\pm 3\pi/8\left[\pi\right]$

$S\cap\left[0,2\pi\right[=\left\{\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{11\pi}{8},\dfrac{13\pi}{8}\right\}$

Exercice 2

Pour tout x, on a :

$\cos 2x=\sin x$

$\Leftrightarrow \cos(2x)=\cos(\pi/2-x)$

$\Leftrightarrow 2x=\pi/2-x\left[2\pi\right]$ ou $2x=x-\pi/2\left[2\pi\right]$

$\Leftrightarrow 3x=\pi/2\left[2\pi\right]$ ou $x=-\pi/2\left[2\pi\right]$

$\Leftrightarrow x=\pi/6\left[2\pi/3\right]$

Pour tout x, on a :

$\sin 5x\cos x-\cos 5x\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(5x-x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin 4x=\sin(\pi/4)$

$\Leftrightarrow 4x=\pi/4\left[2\pi\right]$ ou $4x=\pi-\pi/4\left[2\pi\right]$

$\Leftrightarrow x=\pi/16\left[\pi/2\right]$ ou $x=3\pi/16\left[\pi/2\right]$

Exercice 3. Pour tout x, $\cos 2x=\cos(x+x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x-1+\cos^2 x=2\cos^2 x-1$, d'où $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Pour tout x, on a :

$\cos 2x-3\cos x+2=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-3\cos x+2=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x+1=0$ $\qquad (2X^2-3X+1=(X-1)(2X-1))$

$\Leftrightarrow \cos x=1$ ou $\cos x=1/2$

$\Leftrightarrow x=0\left[2\pi\right]$ ou $x=\pm\pi/3\left[2\pi\right]$

Exercice 4. Donnons l'expression de $f'(x)$ sur l'intervalle I.

1. $f(x)=-3x^5+4x^4-7x^2+3$, $I=\mathbb{R}$, $f'(x)=-15x^4+16x^3-14x$
2. $f(x)=3\sqrt{x}-\dfrac{5}{x}$, $I=\left]0,+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+\dfrac{5}{x^2}$
3. $f(x)=(x^2+1)\sqrt{x}$, $I=\left]0,+\infty\right[$, $f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$, $I=\left]0,+\infty\right[$, $f'(x)=2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$
5. $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+1}$, $I=\mathbb{R}$, $f'(x)=-\dfrac{4x}{(2x^2+1)^2}$
6. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$, $I=\left]2,+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x+1)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$

Exercice 5. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a.

1. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $I=]-1,+\infty[$, $a=0$, $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $f(0)=1$ et $f'(0)=-1$.

Une équation de T est : $y=-x+1$

2. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$, $I=]-3,+\infty[$, $a=1$, $f'(x)=\dfrac{7}{(x+3)^2}$, $f(1)=\dfrac{1}{4}$ et $f'(1)=\dfrac{7}{16}$.

Une équation de T est : $y=\dfrac{7}{16}(x-1)+\dfrac{1}{4}$, soit $y=\dfrac{7}{16}x-\dfrac{3}{16}$.

Exercice 6. Soit f la fonction $x\mapsto x^2-2x+3$ et *C* sa courbe représentative.
Pour tout x, $f'(x)=2x-2$. On a : $f'(x)=1\Leftrightarrow x=3/2$.
Le point d'abscisse 3/2 de *C* est le seul point où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y=(2a-2)(x-a)+a^2-2a+3$.

Cette tangente passe par l'origine si et seulement si $0=(2a-2)(-a)+a^2-2a+3$, soit encore $3-a^2=0$, ce qui amène $a=\pm\sqrt{3}$.