Exercice 1

a. Pour tout x, on a :

$2\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}=\cos(2\pi/3)$

$\Leftrightarrow x=2\pi/3[2\pi]$ ou $x=-2\pi/3[2\pi]$

$S\cap[0,2\pi[=\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$

b. Pour tout x, on a :

$2\sin 2x=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x=\pi/3[2\pi]$ ou $2x=\pi-\pi/3[2\pi]$

$\Leftrightarrow x=\pi/6[\pi]$ ou $x=\pi/3[\pi]$

$S\cap[0,2\pi[=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right\}$

Exercice 2

a. On a : $\cos\frac{5\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.

b. Pour tout x, on a :

$\sin x=\cos\frac{5\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x=-7\pi/6[2\pi]$ ou $x=\pi+7\pi/6[2\pi]$

$\Leftrightarrow x=-7\pi/6[2\pi]$ ou $x=13\pi/6[2\pi]$

$\Leftrightarrow x=5\pi/6[2\pi]$ ou $x=\pi/6[2\pi]$

Exercice 3

Pour tout x,

$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

$=(2\cos^2 x-1)\cos x-2\sin^2 x\cos x=(2\cos^2 x-1)\cos x-2(1-\cos^2 x)\cos x$.

$=4\cos^3 x-3\cos x$

Exercice 4

Donnons l'expression de $f'(x)$ sur l'intervalle I.

1. $f(x)=2x^4-4x^3+3x^2-2$, $I=\mathbb{R}$, $f'(x)=8x^3-12x^2+6x$
2. $f(x)=x^3-\frac{2}{x}$, $I=]0,+\infty[$, $f'(x)=3x^2+\frac{2}{x^2}$
3. $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$, $I=]-2,+\infty[$, $f'(x)=\frac{7}{(x+2)^2}$
4. $f(x)=\frac{1}{(2x+1)^2}$, $I=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f'(x)=-\frac{2(2x+1)2}{(2x+1)^4}=-\frac{4}{(2x+1)^3}$
5. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$, $I=]0,+\infty[$, $f'(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}=-\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$
6. $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$, $I=\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

Exercice 5

Soit f la fonction $x \mapsto x^3$ et *C* sa courbe représentative.
Soit T_a la tangente à *C* au point d'abscisse a.

a. Pour tout x, $f'(x) = 3x^2$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$. Une équation de T_1 est $y = 3(x-1)+1$, soit $y = 3x - 2$

b. On a : $3\times\left(-\frac{7}{3}\right) - 2 = -9$, donc le point $A\left(-\frac{7}{3}, -9\right)$ appartient à T_1.

c. Une équation de T_a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, soit $y = 3a^2(x-a) + a^3$, ou encore $y = 3a^2x - 2a^3$.

d. On a :

$A \in T_a \Leftrightarrow -9 = 3a^2\left(-\frac{7}{3}\right) - 2a^3 \Leftrightarrow 2a^3 + 7a^2 - 9 = 0$.

e. Pour tout a, $(a-1)(2a^2+9a+9) = 2a^3 + 9a^2 + 9a - 2a^2 - 9a - 9 = 2a^3 + 7a^2 - 9$.

f. Pour tout a, $2a^3 + 7a^2 - 9 = (a-1)(2a^2+9a+9) = (a-1)(a+3)(2a+3)$.

Les tangentes à *C* aux points d'abscisses 1, -3 et -3/2 passent par A.