

Exercice 1

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 9} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-3, -2] \cup [1, 3[\quad (\text{en faisant un tableau de signes})$$

Exercice 2

$$\begin{cases} x + y = 126 \\ xy = 3569 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 126 - x \\ x(126 - x) = 3569 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 126 - x \\ x^2 - 126x + 3569 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\Delta = 40^2, \text{ les solutions de (1) sont } x_1 = \frac{126 - 40}{2} = 43 \text{ et } x_2 = \frac{126 + 40}{2} = 83.$$

Les couples solutions sont (43,83) et (83,43).

Exercice 3

1. D_m est la droite de coefficient directeur m et passant par le point $A(2,4)$.

Une équation de D_m est : $y = m(x - 2) + 4$, soit $y = mx - 2m + 4$.

2. On a :

$$M(x, y) \in P \cap D_m \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = mx - 2m + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - mx + 2m - 4 = 0 \end{cases}$$

$$3. P_m(x) = x^2 - mx + 2m - 4, \Delta = m^2 - 4(2m - 4) = m^2 - 8m + 16 = (m - 4)^2.$$

Le polynôme admet une racine double si et seulement si $m = 4$.

4. D_4 coupe P en un seul point, c'est la tangente à P en A , une équation cartésienne de cette tangente est $y = 4x - 4$.

Exercice 4

1. $\overrightarrow{AB}(4, 4)$ est un vecteur directeur de D_1 . Une équation cartésienne de la droite D_1 est $x - y + c = 0$.

$A \in D_1 \Leftrightarrow 3 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -5$. Une équation cartésienne de D_1 est donc $x - y - 5 = 0$.

2. D_2 est parallèle à la droite Δ , donc une équation cartésienne de la droite D_2 est $2x - y + c = 0$.

$C \in D_2 \Leftrightarrow -6 + 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 5$. Une équation cartésienne de D_2 est donc $2x - y + 5 = 0$.

3. Une équation cartésienne de la droite D_3 est $y = \frac{4}{3}(x - 2) + 1$, soit $4x - 3y - 5 = 0$.

$$4. \text{ On a : } \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 5 \\ 2x - x + 5 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = -15 \end{cases}.$$

Le point $I(-10, -15)$ est l'intersection de D_1 et D_2 . On vérifie qu'il appartient aussi à D_3 .

Les trois droites sont concourantes.

Exercice 5

1. On a : $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $I(1/2, 0)$, $L(0,3)$.

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}, \text{ d'où } J(2/5, 3/5).$$

2. On a : $\overrightarrow{IL}(-1/2, 3)$ et $\overrightarrow{IJ}(-1/10, 3/5)$.

$$\det(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IJ}) = \begin{vmatrix} -1/2 & -1/10 \\ 3 & 3/5 \end{vmatrix} = 0, \text{ donc } I, J \text{ et } L \text{ sont alignés.}$$