$$\text{Exercice 1. } \begin{cases} x - y = 15 \\ xy - (x + y) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 15 \\ y(y + 15) - 2y - 15 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 15 \\ y^2 + 13y - 30 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta = 17^2, \text{ les solutions de (1) sont } y_1 = \frac{-13-17}{2} = -15 \text{ et } y_2 = \frac{-13+17}{2} = 2.$$

x et y étant positifs, le seul couple (x, y) solution est $(17, 2)$.

$$\text{Exercice 2. } \begin{cases} x + y = 507 \\ xy = 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 507 - x \\ x(507 - x) = 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 507 - x \\ x^2 - 507x + 2012 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta = 499^2, \text{ les solutions de (1) sont } x_1 = \frac{507-499}{2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{507+499}{2} = 503.$$

Les couples solutions sont $(4, 503)$ et $(503, 4)$.

Exercice 3. 1. D_m est la droite de pente m et passant par $A(1, -2)$.

La droite d'équation $y = m(x - 1) - 2$ est une droite de pente m et qui passe par A , c'est donc la droite D_m .

2. Pour tout M , on a :

$$M(x, y) \in P \cap D_m \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = mx - m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ x^2 - 4x + 5 - mx + m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ x^2 - (4+m)x + m + 7 = 0 \end{cases}$$

Soit $P_m(x) = x^2 - (4+m)x + 7 + m$.

3. Le discriminant de P_m vaut

$$\Delta_m = (4+m)^2 - 4(7+m) = m^2 + 8m + 16 - 28 - 4m = m^2 + 4m - 12 = (m-2)(m+6).$$

4. D_m et P ont un seul point d'intersection lorsque $\Delta_m = 0$, c'est dire pour $m = 2$ ou $m = -6$.

Ces droites sont les tangentes à la parabole passant par A .

Exercice 4. En utilisant le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a : $L(0, 2/3)$, $K(-2, 0)$ et $C(1, 1)$.

De là : $\overrightarrow{KC}(3, 1)$ et $\overrightarrow{KL}(2, 2/3)$.

$$\det(\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KL}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2/3 \end{vmatrix} = 0, \text{ donc les points } K, L \text{ et } C \text{ sont alignés.}$$

Exercice 5. 1. a. $\overrightarrow{AB}(10, -15)$ est un vecteur directeur de D .

b. $\overrightarrow{AB} = -5\vec{v}$, les vecteurs directeurs étant colinéaires, les droites D et D' sont parallèles.

2. Une équation cartésienne de D est : $3x + 2y + c = 0$. $A \in D \Leftrightarrow -15 + 16 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.

Une équation cartésienne de D est donc $3x + 2y - 1 = 0$.

Une équation cartésienne de D' est $3x + 2y = 0$.

3. a. La droite D'' dont l'ordonnée à l'origine est 1 et de vecteur directeur $\vec{u}(4, -7)$ est sécante avec la droite D , en effet $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -2$.

b. Une équation cartésienne de D'' est $7x + 4y - 4 = 0$. On a :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 7x + 4y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ 2y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5/2 \end{cases}$$

Le point $I(2, -5/2)$ est le point d'intersection de D et D'' .