

Exercice 1

Déterminer tous les couples (x, y) solutions de : $\begin{cases} x + y = 91 \\ xy = 2014 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x + y = 91 \\ xy = 2014 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 91 - x \\ x(91 - x) = 2014 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 91 - x \\ x^2 - 91x + 2014 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$\Delta = 225 = 15^2$, les solutions de (1) sont $x_1 = \frac{91-15}{2} = 38$ et $x_2 = \frac{91+15}{2} = 53$.

Les couples solutions sont $(38, 53)$ et $(53, 38)$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit P la parabole d'équation $y = x^2 + 6x + 6$.

Soit D_m la droite d'équation $y = 2x + m$.

1. On a :

$$M(x, y) \in P \cap D_m \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 6x + 6 \\ y = 2x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 6x + 6 \\ x^2 + 6x + 6 - 2x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 6x + 6 \\ x^2 + 4x + 6 - m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

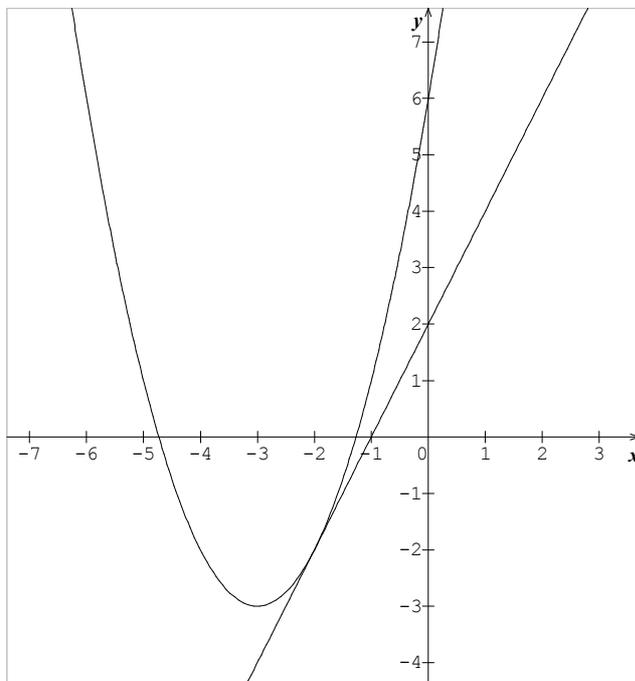
2. Calculons le discriminant du polynôme $P_m(x) = x^2 + 4x + 6 - m$.

$$\Delta = 16 - 4(6 - m) = -8 + 4m$$

3. L'équation (1) admet 2 racines distinctes si et seulement si $\Delta > 0$, soit $m > 2$.

4. L'équation (1) admet une racine double si et seulement si $m = 2$.

La racine double de (1) est alors $x = -2$. Le point d'intersection a alors pour coordonnées $(-2, -2)$. La droite D_2 est la tangente à la parabole au point d'abscisse -2.

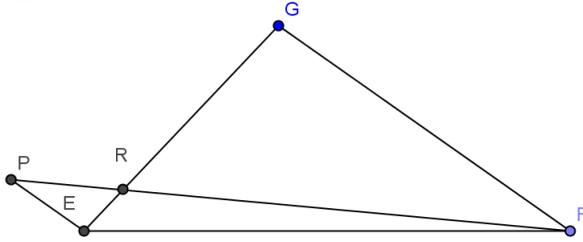


Exercice 3

Soit EFG un triangle non aplati. Le point P est défini par $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$. Le point R est défini

par $\overrightarrow{ER} = \frac{1}{5}\overrightarrow{EG}$.

1. Figure



2. Dans le repère $(E; \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG})$, $E(0, 0)$, $F(1, 0)$, $G(0, 1)$, $\overrightarrow{FG}(-1, 1)$, $P(-1/4, 1/4)$, $R(0, 1/5)$.

On en déduit : $\overrightarrow{PF}(5/4, -1/4)$ et $\overrightarrow{PR}(1/4, -1/20)$.

Ainsi $\overrightarrow{PF} = 5\overrightarrow{PR}$, donc les points F, P et R sont alignés.

Exercice 4

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ soit $A(3, 4)$, $B(1, -1)$ et $C(6, -2)$.

1. $\overrightarrow{AB}(-2, -5)$ est un vecteur directeur de (AB). Une équation cartésienne de la droite (AB) est $5x - 2y + c = 0$. $A \in (AB) \Leftrightarrow 15 - 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -7$. Une équation cartésienne de (AB) est donc $5x - 2y - 7 = 0$.

2. $I = m[AC]$, les coordonnées de I sont $(9/2, 1)$. $\overrightarrow{AB}(-2, -5)$ est un vecteur directeur de D. Une équation cartésienne de la droite D est $5x - 2y + c = 0$.

$I \in D \Leftrightarrow 45/2 - 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -41/2$.

Une équation cartésienne de D est donc $10x - 4y - 41 = 0$.

3. Soit D' la droite d'équation $-16x + y + 98 = 0$.

On a :

$$\begin{cases} 10x - 4y = 41 \\ -16x + y = -98 \end{cases} \begin{array}{l} |1|8 \\ |4|5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -54x = -351 \\ -27y = -162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13/2 \\ y = 6 \end{cases}$$

D et D' sont sécantes en $J(13/2, 6)$.