Exercice 1

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6.
   Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.

   Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.
3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
   a. Quelle est la loi suivie par Y ?
   b. Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures
   c. Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

Exercice 2. Dans un repère orthonormé, on choisit au hasard un point M(X; Y) du carré unité. On modélise ce choix par le couple (X; Y), où les coordonnées X et Y sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur [0; 1]. Un événement A est alors représenté par une partie du carré unité et on admet que la loi de probabilité est définie par : $P(A) = \dfrac{\text{aire}(A)}{\text{aire(carré unité)}} = \text{aire}(A)$.

On note S la variable aléatoire qui au point M associe la somme des coordonnées.

On veut calculer $P(S \leq s)$ pour $s \in [0,2]$.

a) Vérifier que $P(S \leq s) = P(Y \leq -X + s)$.

b) Cas 1 : $0 \leq s \leq 1$. Représenter le carré unité et hachurer la partie du carré qui représente "$S \leq s$". Montrer que $P(S \leq s) = \frac{1}{2}s^2$.

c) Cas 2 : $1 \leq s \leq 2$. Représenter le carré unité et hachurer la partie du carré qui représente "$S \leq s$" et calculer $P(S \leq s)$.

d) Soit f la densité associée à S. Donner l'expression de f.

Exercice 3. Dans un laboratoire pharmaceutique, une machine automatique remplit des flacons avec un certain médicament liquide. Les flacons sont vendus comme contenant 100 ml du produit.

Quand la machine est réglée sur μ (en ml), la quantité de liquide par flacon est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type 1 ml.

1. La machine est réglée sur $\mu = 101$ ml. Quelle est la probabilité que la quantité de liquide dans un flacon soit inférieure à 100 ml ?

2. Sur quelle valeur μ (à 0,1 ml près) faut-il régler la machine pour qu'au plus 5% des flacons contiennent une quantité de liquide inférieure à 100 ml.