Exercice 1

Partie A

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de moteurs tombant en panne durant la première année. X suit la loi binomiale de paramètres n = 20 et p = 0,12.

$$P(X=2)=\binom{20}{2}(0{,}12)^2(0{,}88)^{18}\approx 0{,}274$$

2. $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}88^{20}\approx 0{,}922$

Partie B

1. Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

$P(Y\leq 1)=1-e^{-\lambda}$

On a : $1-e^{-\lambda}=0{,}12 \Leftrightarrow e^{-\lambda}=0{,}88 \Leftrightarrow \lambda=-\ln 0{,}88\approx 0{,}128$

2. $P(Y>3)=e^{-3\lambda}=e^{-0{,}384}\approx 0{,}681$

3. $P_{(X>1)}(X>4)=P(X>3)\approx 0{,}681$ (loi sans vieillissement)

4. a. Pour tout $t\geq 0$, $F(t)=\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx$.

Cherchons une primitive de $x\mapsto \lambda x e^{-\lambda x}$ sous la forme $h(x)=(ax+b)e^{-\lambda x}$.

Pour tout x, $h'(x)=ae^{-\lambda x}-\lambda(ax+b)e^{-\lambda x}=e^{-\lambda x}(-\lambda ax+a-\lambda b)$.

Il suffit de prendre $a=-1$ et $b=-\frac{1}{\lambda}$.

Ainsi : $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dt=\left[\left(-x-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\right]_0^t=\frac{1}{\lambda}\left(1-\lambda t e^{-\lambda t}-e^{-\lambda t}\right)$.

b. $\lim\limits_{t\to+\infty}(-\lambda t)=-\infty$, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X=0$, donc, par composition des limites,

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\lambda t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\lambda t e^{-\lambda t}=0$; on en déduit que $d_m=\frac{1}{\lambda}\approx 7{,}8$.

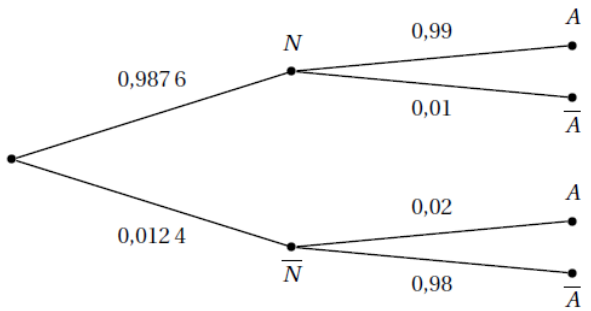
Exercice 2

Partie A

1. X suit la loi normale N(10; $0{,}4^2$).

$P(X<9 \text{ ou } X>11)=1-P(9\leq X\leq 11)\approx 1-0{,}9876=0{,}0124$.

2. a. Arbre :



b. On a :

$$P(A)=P(N\cap A)+P(\overline{N}\cap A)=P(N)\times P_N(A)+P(\overline{N})\times P_{\overline{N}}(A)$$
$$\approx 0{,}9876\times 0{,}99+0{,}0124\times 0{,}02\approx 0{,}9780$$

c. $P_A(\overline{N})=\frac{P(\overline{N}\cap A)}{P(A)}\approx\frac{0{,}0124\times 0{,}02}{0{,}9780}\approx 0{,}0003$

Partie B

1. Y suit la une loi binomiale de paramètres n = 100 et p = 0,0124.
2. $E(Y) = np = 1,24$ et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} \approx 1,1066$
3. $P(Y = 2) = \binom{100}{2}(0,0124)^2(0,9876)^{98} \approx 0,2241$
4. $P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = (0,9876)^{100} + \binom{100}{1}(0,0124)\ (0,9876)^{99} \approx 0,6477$

Exercice 3

Partie A

1. X suit la loi normale N(400, 11^2)

$P(390 \leq X \leq 410) \approx 0,637$

2. $P(X \geq 385) \approx 0,914$
3. X suit maintenant la loi normale N(400, σ^2). La variable aléatoire $T = \dfrac{X - 400}{\sigma}$ suit alors la loi normale N(0, 1).

On a :

$P(X \geq 385) = 0,96$

$\Leftrightarrow P(X - 400 \geq -15) = 0,96$

$\Leftrightarrow P\left(T \geq -\dfrac{15}{\sigma}\right) = 0,96$

$\Leftrightarrow P\left(T \leq -\dfrac{15}{\sigma}\right) = 0,04$

On en déduit que $-\dfrac{15}{\sigma} = -1,751$, d'où $\sigma \approx 8,6$

Partie B

1. T suit la loi exponentielle de paramètre λ.

On a :

$P(T \geq 30) = 0,913$

$\Leftrightarrow e^{-30\lambda} = 0,913$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln 0,913}{-30} \approx 0,003$

2. $P_{(T>60)}(T > 90) = P(X > 30) = 0,913$ (loi sans vieillissement)
3. On a :

$P(T > t) = 0,5$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,5$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx 231$

Le vendeur a tort. La demi-vie de la balance est 231 jours.