Terminale S4

Exercice 1 (4points)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$, $z_D = -i$.

1. L'image E du point D par la transformation de forme complexe $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$ a pour affixe :

- $z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$,
- $z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i)$,
- $z = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)$,
- $z = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$,

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z+i| = |z-1|$ est :
   - la médiatrice du segment [BC],
   - le milieu du segment [BC],
   - le cercle de centre O et de rayon 1,
   - la médiatrice du segment [AD].

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :
   - la droite (CD) privée du point C,
   - le cercle de diamètre [CD] privé du point C,
   - le cercle de diamètre [BD] privé du point C,
   - la médiatrice du segment [AB].

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :
   - le demi-cercle de diamètre [BD] passant par A,
   - la droite (BD),
   - la demi-droite]BD) d'origine B passant par D privée de B,
   - le cercle de diamètre [BD] privé de B et D.

Exercice 2 (4points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4\,;1\,;5)$, $(-3\,;2\,;0)$, $(1\,;3\,;6)$, $(-7\,;0\,;4)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.
   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.
2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.
   On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathscr{P}$.
   c. Retrouver le résultat de la question 1. b.
3. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre F et de rayon 6.
   a. Justifier que le point B appartient à la sphère $\mathscr{S}$.
   b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle $\mathscr{C}$, intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$.

Exercice 3 (7 points)

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

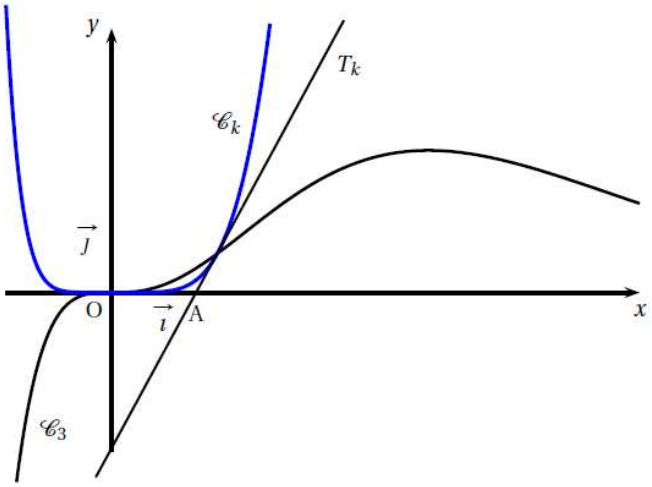
$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}\,;0\right)$.



1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.

   c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. **a.** Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

   b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. **a.** Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\,;\,0\right)$.

   b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

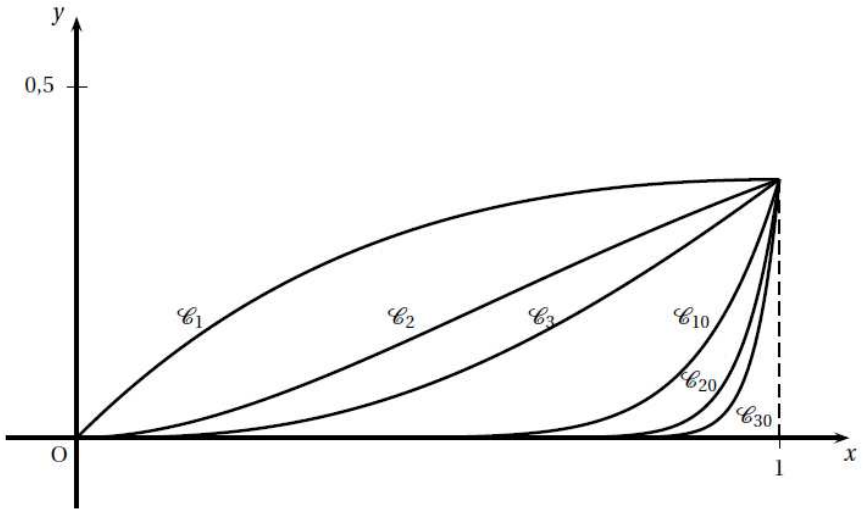
$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.

(on cherchera une primitive sous la forme $x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$)

2.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_{10}, \mathscr{C}_{20}, \mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (I_n)$.