

Exercice 1

1. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i)$
2. la médiatrice de $[AD]$, c'est aussi la médiatrice de $[BC]$
3. le cercle de diamètre $[CD]$ privé de C
4. la demi-droite $]BD[$ d'origine B passant par D privée de B

Exercice 2

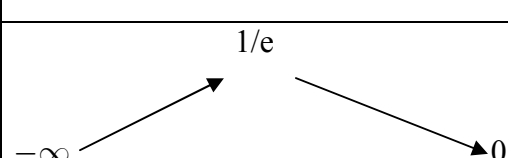
1. a) $\overrightarrow{AB}(-7, 1, -5)$ et $\overrightarrow{AC}(-3, 2, 1)$ sont non colinéaires, donc A, B et C définissent un plan P . Les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation $x + 2y - z - 1 = 0$, donc une équation de P est bien $x + 2y - z - 1 = 0$.
b) $d(F, P) = \frac{|-7 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$.
2. a) $\vec{n}(1, 2, -1)$, vecteur normal de P , est un vecteur directeur de d . Une représentation paramétrique de d est :

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 2t \\ z = 4 - t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$
b) Les coordonnées de H sont de la forme $(-7 + t, 2t, 4 - t)$ et H appartient à P , d'où $-7 + t + 4t - 4 + t - 1 = 0$, soit $t = 2$, ce qui amène $H(-5, 4, 2)$.
c) $\overrightarrow{FH}(2, 4, -2)$, ce qui donne $FH = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.
3. a) $\overrightarrow{FB}(4, 2, -4)$, donc $FB = \sqrt{36} = 6$.
b) La sphère coupe le plan selon un cercle de centre H et de rayon r tel que $r^2 + (2\sqrt{6})^2 = 6^2$ soit $r^2 = 12$, d'où $r = 2\sqrt{3}$.

Exercice 3

Partie A

1. a. $f_1(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, de là $\lim_{-\infty} f_1 = -\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (limite du cours).
b. Pour tout x , $f_1'(x) = (1-x)e^{-x}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1(x)$			

- c. $k \geq 1$ et $\lim_{-\infty} f_1 = -\infty$, donc $k \geq 2$.
2. a. Pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \frac{1}{e}$. Toutes les courbes passent par O et $B(1, 1/e)$.
b. Pour tout $n \geq 2$ et pour tout x , $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$.

3. Pour tout x , $f_3'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f_3'(x)$		$+$	0	$-$

f_3 admet un maximum pour $x = 3$.

4. a. Une équation de T_k est $y = \frac{k-1}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$, soit $y = \frac{(k-1)x - k + 2}{e}$.

$$y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k-2}{k-1}.$$

$$b. \frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5k-10 = 4k-4 \Leftrightarrow k = 6.$$

Partie B

Pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Soit $F(x) = (ax+b)e^{-x}$, $F'(x) = e^{-x}(-ax+a-b)$, on prend $a=b=-1$.

$$D'où \quad I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx = \left[(-x-1)e^{-x} \right]_0^1 = -2e^{-1} + 1.$$

2. a. I_n représente l'aire, en u.a., du domaine $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f_n(x) \end{cases}$.

Conjecture : la suite (I_n) est décroissante.

b. . Pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a successivement :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n \quad \text{car } x^n \geq 0$$

$$0 \leq x^{n+1}e^{-x} \leq x^n e^{-x} \quad \text{car } e^{-x} \geq 0$$

D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient :

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

c. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

d. Pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a successivement :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq -x \leq 0$$

$$e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$$

$$0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

D'où, en intégrant dans le sens croissant de 0 à 1, on obtient :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\lim I_n = 0$.