

Exercice 1

1. On a, pour tout n ,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = u_n / 3 + 4 - 6 = u_n / 3 - 2 = (u_n - 6) / 3 = v_n / 3.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1/3$.

2. On a $v_0 = -5$, d'où, pour tout n , $v_n = -5(1/3)^n$, $u_n = 6 - 5(1/3)^n$.

3. $|1/3| < 1$, donc $\lim (1/3)^n = 0$, d'où $\lim u_n = 6$.

Exercice 2

1. Pour tout n , on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{(3u_n + 2)/(u_n + 4) - 1}{(3u_n + 2)/(u_n + 4) + 2} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} = \frac{2}{5} v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $2/5$ et de premier terme $v_0 = -1/2$.

2. Pour tout n , $v_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

3. Pour tout n , on a :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}.$$

4. $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$, donc $\lim v_n = 0$, d'où $\lim u_n = 1$.

Exercice 3

1. Pour tout n , on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 4 = \frac{1}{2}u_n + n - 2n + 2 = \frac{1}{2}u_n - n + 2 = v_n / 2$.

2. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme 5 ; d'où, pour tout n ,

$$v_n = 5(1/2)^n, \text{ soit } u_n = v_n + 2n - 4 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 4.$$

3. Pour tout n , on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^n u_i = 5\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + 2(1 + 2 + \dots + n) - 4(n+1) \\ &= 5 \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} + n(n+1) - 4(n+1) = n^2 - 3n + 6 - \frac{10}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Exercice 4

1. Soit la suite géométrique (q^n) avec $q \neq 0$. Cette suite vérifie la relation (1) si et seulement si, pour tout n , on a : $q^{n+2} = q^{n+1} + 6q^n$, soit $q^2 - q - 6 = 0$ car $q \neq 0$, de là $q = -2$ ou $q = 3$.

On pose, pour tout n , $t_n = (-2)^n$, $r_n = 3^n$. Les suites géométriques (t_n) et (r_n) vérifient la relation (1).

2. On a :

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ -1 = -2a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = at_n + br_n$. Alors, pour tout n , on a :

$$w_{n+2} = at_{n+2} + br_{n+2} = a(t_{n+1} + 6t_n) + b(r_{n+1} + 6r_n) = (at_{n+1} + br_{n+1}) + 6(at_n + br_n) = w_{n+1} + 6w_n.$$

La suite $(at_n + br_n)$ vérifie la propriété (1), de plus les deux premiers termes de cette suite sont identiques aux deux premiers termes de la suite (u_n) , pour les suivants le procédé de calcul est identique, on peut en déduire que, pour tout n , $u_n = at_n + br_n$.

Conclusion : pour tout n , $u_n = 2(-2)^n + 3^n$.

Pour tout n , $u_n = 3^n(1 + 2(-2/3)^n)$.

$|-2/3| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2/3)^n = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.