Terminale S4

Exercice 1

A. Rappel : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Montrer que toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

B. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier n , $u_n > n^2$. En déduire la limite de la suite.
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 2

Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$:

a) $-3n^3 + 5n + 7$ b) $\left(\frac{-1}{4}\right)^n \times \left(\frac{8}{3}\right)^{n+1}$ c) $\sqrt{n+3} - \sqrt{n}$ d) $\frac{n+3n^2}{-2n+2n^2}$

e) $1 - \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ f) $\sqrt{n^2 + 4n} - n$ g) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n , $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. Ecrire v_n en fonction de n .
3. Ecrire u_n en fonction de v_n .
4. Calculer $\lim u_n$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par : $f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Etudier les variations de f sur $] -1, +\infty[$.
b) Sur un graphique représentant f , placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite.
c) Que peut-on conjecturer sur le sens de variations et la convergence de la suite.
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.