Terminale S1

Exercice 1. Question de cours

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

Montrer que si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

Exercice 2

Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$:

a) $-n^3 + 5n^2$ b) $\dfrac{-3^{2n}}{8^n}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

d) $\dfrac{n^2+3}{2n^3-1}$ e) $\dfrac{(-1)^n \sin n}{3^n}$ f) $\sqrt{n^2+3n} - n$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Etudier les variations de f sur $[0,+\infty[$.
3. En utilisant les variations de f sur $[0,\ 1]$, démontrer par récurrence que, pour tout n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer sa limite.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$ (1).

1. Démontrer par récurrence que, pour tout n, $u_n \leq n+3$.
2. Démontrer que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$.
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4. On pose, pour tout n, $v_n = u_n - n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
5. En déduire que, pour tout n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.
6. Quelle est la limite de (u_n).