Exercice 1

1. affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a+330$
   affecter à n la valeur n + 1

2. On pose, pour tout n, $u_n = a_n - 1320$.

Pour tout n, on a :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 1320 = \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320 = \frac{3}{4}a_n - 990 = \frac{3}{4}u_n.$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 = -520$.

3. Ainsi, pour tout n, $u_n = -520\left(\frac{3}{4}\right)^n$, d'où $a_n = -520\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1320$.

4. $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$, donc $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, on en déduit que $\lim a_n = 1320$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. $u_1 = 2$ et $u_2 = 6$.
2. Pour tout n, $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n + 2$.

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 2$.

3. Pour tout n,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + ... + v_n = \frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2} = \frac{(n+1)(2+2n+2)}{2} = (n+1)(n+2).$$

4. Pour tout n,

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + ... + u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_0.$$

Ainsi, pour tout n, $u_{n+1} = u_0 + S_n = (n+1)(n+2)$.

De là, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2 = (n+1)(n+2)$, d'où

$$u_n = n^2 + 3n + 2 - 2n - 2 = n^2 + n.$$

Exercice 3

1. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

2. a) Soit $f(x) = x^2 + x$, $x \in [-1, 0]$. Pour tout x, $f'(x) = 2x + 1$.

La fonction f est strictement croissante sur $[-1/2, 0]$ et strictement décroissante sur $[-1, -1/2]$.

x	-1		-1/2		0
f(x)	0	↘	$-1/4$	↗	0

Au vu du tableau, pour tout $x \in]-1, 0[$, $f(x) \in [-1/4, 0[\subset]-1, 0[$.

3. Montrons par récurrence que, pour tout n, $-1 < u_n < 0$.
$-1 < u_0 < 0$, donc la propriété est vraie pour n = 0.
Supposons que, pour n entier quelconque, $-1 < u_n < 0$, alors, d'après 2a, $u_{n+1} = f(u_n) \in]-1,0[$.
La propriété est donc héréditaire.
Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge. Soit $L = \lim u_n$.

5. Pour tout n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$. Par passage à la limite, $L = L^2 + L$, d'où L = 0.