Exercice 1

1. On a : $1000 = 142 \times 7 + 6$, ainsi $10^3 \equiv 6[7]$, soit encore $10^3 \equiv -1[7]$. On en déduit que $(10^3)^2 \equiv (-1)^2[7]$, soit $10^6 \equiv 1[7]$. Le reste de 10^6 dans la division euclidienne par 7 est 1.
2. On a : $2011 = 6 \times 335 + 1$.
3. D'après les questions précédentes : $10^6 \equiv 1[7]$, donc $(10^6)^{335} \equiv 1[7]$, d'où $10^{2011} = 10^{6 \times 335 + 1} \equiv 10[7]$, soit $10^{2011} \equiv 3[7]$.
Le reste de 10^{2011} dans la division par 7 est 3.

Exercice 2

1. On a : $3^2 \equiv 2[7]$, $3^3 \equiv 6[7]$, $3^4 \equiv 4[7]$, $3^5 \equiv 5[7]$ et $3^6 \equiv 1[7]$.
Soit n un entier naturel, $(3^6)^n \equiv 1^n[7]$, soit $3^{6n} \equiv 1[7]$.
On en déduit que : $3^{6n+1} \equiv 3[7]$, $3^{6n+2} \equiv 2[7]$, $3^{6n+3} \equiv 6[7]$, $3^{6n+4} \equiv 4[7]$, $3^{6n+5} \equiv 5[7]$.
2. $2243 = 7 \times 320 + 3$, donc $2243 \equiv 3[7]$, et $325 = 6 \times 54 + 1$.
On a donc $2243^{325} \equiv 3^{325}[7]$, or d'après 1, $3^{325} \equiv 3[7]$.
 $1179 = 7 \times 168 + 3$, donc $1179 \equiv 3[7]$, et $154 = 6 \times 25 + 4$.
On a donc $1179^{154} \equiv 3^{154}[7]$, or d'après 1, $3^{154} \equiv 4[7]$.
Il s'ensuit que $A = (2243)^{325} + (1179)^{154} \equiv 3^{325} + 3^{154}[7] \equiv 3 + 4[7] \equiv 0[7]$.
3. $B = 3^8 + 2 \cdot 3^7 + 3^6 + 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 1$, d'après 1, on a :
 $B \equiv 2 + 2 \times 3 + 1 + 4 + 2 \times 2 + 1[7] \equiv 18[7] \equiv 4[7]$

Exercice 3

1. On a : $4 \equiv 1[3]$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n \equiv 1^n[3]$, soit $4^n \equiv 1[3]$.
2. On a : $4 \equiv 4[17]$, $4^2 \equiv 16[17] \equiv -1[17]$, $4^3 \equiv 13[17]$ et $4^4 \equiv 1[17]$.
Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $4^{4k} = (4^4)^k \equiv 1^k[17]$, soit $4^{4k} \equiv 1[17]$.
3. On a : $4^2 \equiv 1[5]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^{2n} \equiv 1[5]$ et $4^{2n+1} \equiv 4[5]$.
Le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 si et seulement si n est pair.
4. D'après 1, 3 divise $4^{28} - 1$.
D'après 2, 17 divise $4^{28} - 1$ car $28 = 4 \times 7$.
D'après 3, 5 divise $4^{28} - 1$ car 28 est pair.