Exercice 1

1. $2^4 = 16$, donc $2^4 \equiv 6[10]$.

On en déduit que, pour tout k entier naturel non nul, $2^{4k} \equiv 6^k[10]$.

Or le chiffre des unités de 6^k, pour $k \in \mathbb{N}^*$, est toujours 6, donc $6^k \equiv 6[10]$, d'où $2^{4k} \equiv 6[10]$.

2. $2012 \equiv 2[10]$ et $2013 = 4\times 503 + 1$, donc $2012^{2013} \equiv 2^{2013}[10]$ et $2^{2013} = 2^{4\times 503+1}$.

Or $2^{4\times 503} \equiv 6[10]$, donc $2^{2013} \equiv 6\times 2[10] \equiv 2[10]$.

Le chiffre des unités de 2012^{2013} est 2.

Exercice 2

1. Déterminons selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 4^n par 11.

$4^0 \equiv 1[11]$, $4^1 \equiv 4[11]$, $4^2 \equiv 5[11]$, $4^3 \equiv 9[11]$, $4^4 \equiv 3[11]$, $4^5 \equiv 1[11]$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $4^{5k} \equiv 1[11]$.

Reste de n modulo 5	0	1	2	3	4
Reste de 4^n modulo 11	1	4	5	9	3

2. Déterminons selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division de 3^n par 11.

$3^0 \equiv 1[11]$, $3^1 \equiv 3[11]$, $3^2 \equiv 9[11]$, $3^3 \equiv 5[11]$, $3^4 \equiv 4[11]$, $3^5 \equiv 1[11]$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $3^{5k} \equiv 1[11]$.

Reste de n modulo 5	0	1	2	3	4
Reste de 3^n modulo 11	1	3	9	5	4

3. Déterminons toutes les valeurs de n telles que $4^n - 3^n$ soit divisible par 11.

Reste de n modulo 5	0	1	2	3	4
Reste de $4^n - 3^n$ modulo 11	0	1	7	4	10

$4^n - 3^n$ est divisible par 11 si et seulement si n est divisible par 5.

Exercice 3

1. a. $2^3 = 8 \equiv 1[7]$, donc , pour tout entier naturel k, on a $2^{3k} \equiv 1[7]$.

b. $2009 = 3\times 669 + 2$, donc $2^{2009} = 2^{3\times 669+2} \equiv 2^2[7]$

Le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est 4.

2. Soit a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a\times 10^3 + b = \overline{a00b}^{10}$.

Déterminons parmi ces nombres ceux qui sont divisibles par 7.

a. $10^3 = 1000 = 7\times 142 + 6$, donc $10^3 \equiv -1[7]$.

b. On a :

$N \equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow a\times 10^3 + b \equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow b - a \equiv 0[7]$

$\Leftrightarrow a \equiv b[7]$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	1 ou 8	2 ou 9	3	4	5	6	0 ou 7	1 ou 8	2 ou 9

Les nombres entiers N cherchés sont : 1001, 1008, 2002, 2009, 3003, 4004, 5005, 6006, 7000, 7007, 8001, 8008, 9002 et 9009.