Exercice 1

1. On a : $2009 = 182 \times 11 + 7$, donc $2009 \equiv 7[11]$.
2. On a : $2^{10} = 1024 = 93 \times 11 + 1$, donc $2^{10} \equiv 1[11]$.
3. Pour tout entier naturel n, $2^{10n} = \left(2^{10}\right)^n \equiv 1^n [11]$, soit $2^{10n} \equiv 1[11]$.

Or $2009 = 10 \times 200 + 9$, donc $2^{2009} = 2^{10\times 200+9} \equiv 2^9 [11]$.

$2^9 = 512 = 46 \times 11 + 6$, donc $2^9 \equiv 6[11]$.

Finalement $2^{2009} + 2009 \equiv 6 + 7[11] \equiv 2[11]$.

Exercice 2

1. $2^3 = 8 \equiv 1[7]$, donc, pour tout n, $\left(2^3\right)^n \equiv 1^n [7]$, soit $2^{3n} \equiv 1[7]$.
2. $2011 = 287 \times 7 + 2$, donc $2011 \equiv 2[7]$, d'où $2011^{2012} \equiv 2^{2012} [7]$.

Or $2012 = 3 \times 670 + 2$, donc $2^{2012} = 2^{3\times 670+2}$, d'où $2^{2012} \equiv 2^2 [7]$.

Finalement $2011^{2012} \equiv 4[7]$.

Exercice 3

1. $u_1 = 10,\ u_2 = 48,\ u_3 = 250,\ u_4 = 1392,\ u_5 = 8050,\ u_6 = 47448$.
2. On a : $2 \equiv 0[2]$, $3 \equiv 1[2]$ et $6 \equiv 0[2]$, donc , pour tout n entier naturel non nul, $2^n \equiv 0[2]$, $3^n \equiv 1[2]$ et $6^n \equiv 0[2]$.

Ainsi, pour tout n entier naturel non nul, $u_n \equiv 0 + 1 + 0 - 1[2]$, donc u_n est pair.

3. On a : $3 \equiv -1[4]$ et $6 \equiv 2[4]$. Soit $n = 2p$, où p est un entier naturel non nul.

$2^n = 2^{2p} = \left(2^2\right)^p = 4^p \equiv 0[4]$.

Ainsi $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 2^n + (-1)^n + 2^n - 1[4] \equiv 1 - 1[4] \equiv 0[4]$.

4. Soit $n = 2p + 1$, où p est un entier naturel.

$2 \times 2^n = 2 \times 2^{2p+1} = 4 \times 2^{2p} \equiv 0[4]$

Alors $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 2^n + (-1)^n + 2^n - 1[4] \equiv 2 \times 2^n - 2[4] \equiv 2[4]$

Exercice 4

A = 12
Résultats affichés :
1, 12
2, 6
3, 4

$N \times \dfrac{A}{N} = A$, $N \leq \sqrt{A}$ et $\dfrac{A}{N} \geq \sqrt{A}$, N et $\dfrac{A}{N}$ affichés sont 2 diviseurs de A

Cet algorithme affiche tous les diviseurs de A.

Si 1 et A sont les seules valeurs affichées, alors A est premier si $A \geq 2$.