Exercice 1

Montrer que, pour tout entier naturel n, $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 7.

Exercice 2

Montrer que, pour tout entier naturel k, $2^{10k} \equiv 1[11]$.

Quel est le reste dans la division euclidienne de 2015^{2014} par 11?

Exercice 3

1. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.
2. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

Si p = 3n, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

Démontrer que si p = 3n + 1, alors A_p est divisible par 7.

Etudier le cas où p = 3n + 2.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout n, $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer que, pour tout n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

En déduire l'écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.