Exercice 1

Montrons que, pour tout entier naturel n, $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 7.
On a : $5^6=15625=2232\times 7+1$, soit $5^6\equiv 1[7]$, donc, pour tout entier naturel n,
$5^{6n}=\left(5^6\right)^n\equiv 1^n[7]$, de là $5^{6n+1}\equiv 5[7]$.
On a : $2^3=8\equiv 1[7]$, donc, pour tout entier naturel n, $2^{3n}=\left(2^3\right)^n\equiv 1^n[7]$, de là $2^{3n+1}\equiv 2[7]$.
Il s'ensuit que, pour tout n, $5^{6n+1}+2^{3n+1}\equiv 5+2[7]$, soit $5^{6n+1}+2^{3n+1}\equiv 0[7]$, donc $5^{6n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 7.

Exercice 2

$2^{10}=1024=11\times 93+1$, donc, pour tout n, $\left(2^{10}\right)^n\equiv 1^n[11]$, soit $2^{10n}\equiv 1[11]$.
$2015=11\times 183+2$, donc $2015\equiv 2[11]$, d'où $2015^{2014}\equiv 2^{2014}[11]$.
Or $2014=10\times 201+4$, donc $2^{2014}=2^{10\times 201+4}$, d'où $2^{2014}\equiv 2^4[11]$.
Finalement $2015^{2014}\equiv 5[11]$. Le reste dans la division euclidienne de 2015^{2014} par 11 est5.

Exercice 3

1. Soit k un entier naturel, $2^3\equiv 1[7]$, donc $(2^3)^k\equiv 1^k[7]$, soit $2^{3k}\equiv 1[7]$.
$2^{3k}\equiv 1[7]$, donc $2^{3k}\times 2\equiv 1\times 2[7]$, soit $2^{3k+1}\equiv 2[7]$, de là $2^{3n+2}\equiv 4[7]$.

2. Soit p un entier naturel, $A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}$.
a. Si $p=3n$, $A_p=2^{3n}+2^{6n}+2^{9n}\equiv 1+1+1[7]$, soit $A_p\equiv 3[7]$.
Le reste de la division euclidienne de A_p par 7 est 3.
Si $p=3n+1$, $A_p=2^{3n+1}+2^{6n+2}+2^{9n+3}\equiv 2+4+1[7]$, soit $A_p\equiv 0[7]$, donc A_p est divisible par 7 .
Si $p=3n+2$, $A_p=2^{3n+2}+2^{6n+4}+2^{9n+6}\equiv 4+2+1[7]$, soit $A_p\equiv 0[7]$, donc A_p est divisible par 7 .

Exercice 4

$u_0=1$ et, pour tout n, $u_{n+1}=10u_n+21$.
1. $u_1=31$, $u_2=331$ et $u_3=3331$.
2. Démontrons que, pour tout n, $3u_n=10^{n+1}-7$.
La propriété est vraie pour n = 0, en effet $3=10-7$.
Supposons que, pour n quelconque, $3u_n=10^{n+1}-7$, alors
$3u_{n+1}=10\times 3u_n+63=10\times(10^{n+1}-7)+63=10^{n+2}-7$. Donc la propriété est héréditaire.
Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.
Ainsi, pour tout n, $3u_n=9999..93$ (n fois le chiffre 9), d'où $u_n=3333...31$(n fois le chiffre 3).
3. $\sqrt{u_2}\approx 18,2$. Aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7,11, 13 et 17 ne divise u_2 , donc ce nombre est premier.