

Terminale S5

Question de cours

Rappel : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Montrer que toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 1

Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies, pour tout $n > 0$, par

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

1. Calculer x_1 , x_2 , x_3 , y_1 , y_2 et y_3 .
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (y_n) est croissante.
4. Montrer que les deux suites sont adjacentes.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $] -2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$.

1. a) Etudier les variations de f sur $] -2, +\infty[$.
b) Montrer que si $x \in [1, 5]$, alors $f(x) \in [1, 5]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que, pour tout n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Soit $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Démontrer que f admet trois racines réelles.
3. Donner un encadrement de largeur 10^{-3} de la plus grande racine (on justifiera le résultat).

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.
Soit C_f et C_g les courbes représentatives dans un repère orthonormé.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle des asymptotes horizontales ?
2. Démontrer que la droite d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à C_f en $-\infty$.
3. Montrer que C_g admet un axe de symétrie.