Question de cours

Montrons que toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Supposons la suite (u_n) croissante et non majorée. Soit M un réel quelconque, M n'est pas un majorant de la suite, donc il existe $u_p > M$. Or la suite est croissante, donc, pour tout $n \geq p$, $u_n > M$.

Tout intervalle $]M;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Donc $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 1

Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies, pour tout $n > 0$, par

$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$ et $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$.

1. $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{13}{12}$, $x_3 = \frac{19}{20}$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{7}{12}$ et $y_3 = \frac{37}{60}$.

2. Pour tout $n > 0$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{2n^2 + n + 2n^2 + 2n - 4n^2 - 6n - 2}{n(2n+1)(2n+2)} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$$

Donc la suite (x_n) est décroissante.

3. Pour tout $n > 0$, on a :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1+2n+2-4n-2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

Donc la suite (y_n) est croissante.

4. Pour tout $n > 0$, $x_n - y_n = \frac{1}{n}$, donc $\lim(x_n - y_n) = 0$.

La suite (y_n) est croissante , la suite (x_n) est décroissante et $\lim(x_n - y_n) = 0$.

Les suites (x_n) et (y_n) sont deux suites adjacentes, elles convergent donc vers la même limite L.

Exercice 2

1. a) Pour tout $x \in]-2,+\infty[$, $f'(x) = \frac{9}{(x+2)^2}$. La fonction f est strictement croissante sur $]-2,+\infty[$.

b) La fonction f est strictement croissante sur $]-2,+\infty[$. Si $1 \leq x \leq 5$, alors

$1 = f(1) \leq f(x) \leq f(5) = \frac{19}{7}$, donc $f(x) \in [0,5]$.

2. a) Montrons par récurrence que, pour tout n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$.

$u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{19}{7}$, donc la propriété est vérifiée pour n = 0.

Si pour n quelconque, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$, alors, la fonction f étant croissante sur $[1,5]$,

$1 = f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(5) \leq 5$, donc $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 5$. Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

b) La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 1, par le théorème du cours, elle est donc convergente. Soit $\lim u_n = L$, avec $L \in [1,5]$. Pour tout n, $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$, donc L vérifie l'équation

$L = \frac{4L-1}{L+2}$, soit $L^2 - 2L + 1 = 0$, d'où L = 1.

Exercice 3

1. Pour tout x, $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$, $f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x^2 - x - 1) = 6(x-1)(2x+1)$.

On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		-2	$-1/2$		1		2	$+\infty$
f '(x)		$+$		0	$-$	0	$+$		
f(x)	$-\infty$		-30	$15/4$		-3		10	$+\infty$

2. La fonction f est continue et strictement monotone sur les intervalles $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$, $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ et $\left[1,+\infty\right[$, au vu du tableau de variations et par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f admet une racine unique sur chacun de ces intervalles.

3. Soit α la plus grande racine. $f(1,520) \approx -0,004$ et $f(1,521) \approx 0,009$, donc $1,520 < \alpha < 1,521$.

Exercice 4

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$; or $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

Limite en $+\infty$

Pour tout x > 0, $f(x) = \dfrac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \dfrac{x+1}{x\sqrt{1+1/x+1/x^2}+x} = \dfrac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (1+1/x+1/x^2) = 1$, $\lim\limits_{X\to1} \sqrt{X} = 1$, donc, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+1/x+1/x^2} = 1$; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+1/x) = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f = \frac{1}{2}$.

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

2. Equation de la droite asymptote à C en $-\infty$

Pour tout x < 0, $f(x) + 2x + \dfrac{1}{2} = \sqrt{x^2+x+1} + x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+1} - x - \frac{1}{2}}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) + 2x + \dfrac{1}{2} \right) = 0$.

Une équation de la droite asymptote en $-\infty$ est $y = -2x - \frac{1}{2}$.

3. Pour tout x, $g(x) = \sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}$.

Pour tout x, $g\left(-\dfrac{1}{2}+x\right) = \sqrt{x^2+\dfrac{3}{4}} = g\left(-\dfrac{1}{2}-x)\right)$. Donc la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe.