Exercice 1

1. Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$.

Pour tout x, $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x-1)(x+2)$.

On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	28	↘	1	↗	$+\infty$

Pour tout $x \geq -2$, $f(x) > 0$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, -2]$, au vu du tableau de variations et par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f admet une racine unique α sur cet intervalle.

2. $f(-3,525) \approx -0,024$ et $f(-3,524) \approx 0,018$, donc $-3,525 < \alpha < -3,524$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x - 5}$.

1. Pour tout x, $x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$, d'où $D_f =]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$.

2. On vérifie que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 - 9}$.

Ainsi pour tout $x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$, $f(2+x) = \sqrt{x^2 - 9} = f(2-x)$.

Donc la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie pour la courbe.

3. Pour tout $x \geq 5$, $f(x) - x + 2 = \sqrt{x^2 - 4x - 5} - x + 2 = \dfrac{-9}{\sqrt{x^2 - 4x - 5} + x - 2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x - 5} + x - 2) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x + 2) = 0$.

La droite D d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à C_f en $+\infty$.

4. La droite D', symétrique de D par rapport à l'axe d'équation x = 2, sera l'asymptote à C_f en $-\infty$. Une équation de D' est $y = -x + 2$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

1. On a : $\dfrac{x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[$. Donc $D_f =]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3}{x-2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc, par composition des limites, $\lim\limits_{\pm\infty} f = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^3}{x-2} = +\infty$, et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc, par composition des limites, $\lim\limits_{2^+} f = +\infty$.

2. Dérivabilité de f en 0.

Pour tout $x < 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{|x|}{x} \sqrt{\dfrac{x}{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$.

D'où $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$, f est donc dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

3. Pour tout $x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]2,+\infty\right[$,

$$f'(x)=\frac{1}{2f(x)}\left(\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}\right)=\frac{x^2(2x-6)}{2(x-2)^2f(x)}=\frac{x^2(x-3)}{(x-2)^2f(x)}.$$

4. Pour tout $x>2$,

$$f(x)-(x+1)=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-(x+1)=\frac{\dfrac{x^3}{x-2}-(x^2+2x+1)}{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}+x+1}=\frac{\dfrac{3x+2}{x-2}}{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}+x+1}$$

On en déduit aisément que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=0$

Donc la droite D d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2(x+2)}{x^2+1}$. On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x+2-\dfrac{x+2}{x^2+1}=\dfrac{x^3+2x^2+x+2-x-2}{x^2+1}=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$, donc la droite D d'équation y = x + 2 est asymptote oblique à la courbe en $\pm\infty$.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-(x+2)=-\dfrac{x+2}{x^2+1}$.

Sur $\left]-\infty,-2\right[$, C est toujours strictement au-dessus de D.

Sur $\left]-2,+\infty\right[$, C est toujours strictement au-dessous de D.

C et D sont sécantes au point d'abscisse -2.

3. f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{(3x^2+4x)(x^2+1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+1)^2}=\frac{x(x+1)(x^2-x+4)}{(x^2+1)^2}.$$

Le discriminant de x^2-x+4 est strictement négatif, donc, pour tout x, $x^2-x+4>0$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $x(x+1)$.

4. Les variations de f sont résumées dans le tableau.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f ' (x)		+	0	-	0	+	
f (x)	$-\infty$	↗	1/2	↘	0	↗	$+\infty$

5. $f'(-2)=\dfrac{4}{5}$ et $f(-2)=0$. Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2 est $y=\dfrac{4}{5}(x+2)$.