Exercice 1

1. Démontrer que l'équation $x^3+x^2+x-1=0$ admet une unique solution réelle.
2. Utiliser la calculatrice pour donner un encadrement de largeur 10^{-3} de cette solution.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1. Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.
3. La fonction f est-elle continue en 0 ?
4. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x^2+4}{(x+1)^2}$. On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Calculer $\lim\limits_{-1} f$, $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

En déduire que la courbe admet 2 asymptotes dont on donnera les équations.

2. Calculer f ' (x) et montrer que $f'(x)=\dfrac{4(x-2)}{(x+1)^3}$. Etudier le signe de f ' (x).
3. Faire le tableau de variations.
4. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 4

Soit $f(x)=x\sqrt{1-x}$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 1.
2. Montrer que, pour tout $x\in\left]-\infty,1\right[$, $f'(x)=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$.

Faire le tableau de variations de la fonction.

3. Justifier que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de largeur 10^{-3} de α (on justifiera le résultat).
4. Par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$, où m est un réel donné.