Exercice 1

1. Soit $f(x)=x^3+x^2+x-1$.

Pour tout x, $f'(x)=3x^2+2x+1$. Le discriminant de f '(x) est -8, donc , pour tout x, $f'(x)>0$.
On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$+\infty$
f '(x)		+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, au vu du tableau de variations et par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f admet une racine unique α.

2. $f(0,543)\approx -0,002$ et $f(0,544)\approx 0,0009$, donc $0,543<\alpha<0,544$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1. Pour tout $x>0, f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\dfrac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x}=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}$.

On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f=1$.

2. Pour tout $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\dfrac{x^2+1-1}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

D'où $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{1}{2}$, donc f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

3. La fonction f est dérivable en 0, donc elle est continue en 0.

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}-\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{x^2}=\dfrac{x^2-\left(x^2+1-\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 3

Soit $f(x)=\dfrac{2x^2+4}{(x+1)^2}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+4}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$, donc la droite D d'équation y = 2 est asymptote horizontale à la courbe en $\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1}2x^2+4=6$, donc $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale.

2. f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition. Pour tout $x\in D_f$,

$f'(x)=\dfrac{4x(x+1)^2-2(x+1)(2x^2+4)}{(x+1)^4}=\dfrac{4x^2+4x-4x^2-8}{(x+1)^3}=\dfrac{4(x-2)}{(x+1)^3}$.

Pour tout $x\in D_f$, f '(x) est du signe de $(x-2)(x+1)$.

3. Les variations de f sont résumées dans le tableau.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f ' (x)		+	‖	-	0	+	
f (x)	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4/3	↗	2

4. $f(1) = 3/2$ et $f'(1) = -0,5$, une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = -0,5(x-1)+1,5$, soit $y = -0,5x+2$.

Exercice 4

Soit $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. La fonction f est continue sur $]-\infty,1]$. Dérivabilité de f en 1.

$D_f =]-\infty,1]$. Pour tout $x<1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x\sqrt{1-x}}{x-1} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en 1, cependant la courbe admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale.

2. La fonction f est dérivable sur $]-\infty,1[$.

Pour tout $x \in]-\infty,1[$, $f'(x) = \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$.

x	$-\infty$	0		2/3		1
f '(x)		+		0	-	$-\infty$ ‖
f(x)	$-\infty$	0	↗	$2\sqrt{3}/9$	↘	0

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3. Sur $[0,1]$, $f(x) \geq 0$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0]$, au vu du tableau de variations et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe α unique dans $]-\infty,0]$ tel que $f(\alpha) = -2$.

$f(-1,314)+2 \approx 0,00116$ et $f(-1,315)+2 \approx -0,0008$, on en déduit que $-1,315 < \alpha < -1,314$.

4. Nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, où m est un réel donné.

Si $m<0$ ou $m = 2\sqrt{3}/9$, une solution.

Si $0 \leq m < 2\sqrt{3}/9$, deux solutions.

Si $m > 2\sqrt{3}/9$, pas de solution.