

Exercice 1

Pour tout entier naturel n , par : $u_0 = 3$, $v_0 = 4$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$.

1. $u_1 = \frac{7}{2}$, $v_1 = \frac{15}{4}$.

2. a. Pour tout entier naturel n , $w_n = v_n - u_n$. Pour tout n , on a :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4} w_n.$$

La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. $w_0 = v_0 - u_0 = 1$, donc, pour tout n , $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left|\frac{1}{4}\right| < 1$, donc $\lim w_n = 0$.

3. a. Pour tout n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2} w_n > 0, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{1}{4} w_n < 0.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante et que la suite (v_n) est strictement décroissante.

b) Pour tout n , $w_n = v_n - u_n > 0$ donc $v_n > u_n$.

Pour tout n , $3 = u_0 \leq u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \leq v_0 = 4$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 4, donc elle converge, soit $\lim u_n = L$.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par 3, donc elle converge, soit $\lim v_n = L'$.

Or $\lim w_n = \lim(u_n - v_n) = 0$, donc $L = L'$.

4. a. Pour tout entier naturel n , $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$. Pour tout n , on a :

$$t_{n+1} - t_n = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n + 2(v_{n+1} - v_n)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} w_n + 2 \times \left(-\frac{1}{4} w_n\right)\right) = 0.$$

b. La suite est constante. Pour tout n , $t_n = t_0 = \frac{11}{3}$.

$$\lim t_n = \frac{L + 2L}{3} = \frac{11}{3}. \text{ D'où } L = \frac{11}{3}.$$

Exercice 2

Soit $f(x) = \frac{x(3x+4)}{x^2+1}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(3x+4)}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$, donc la droite D d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe en $\pm\infty$.

$$\text{Pour tout } x, f(x) - 3 = \frac{x(3x+4)}{x^2+1} - 3 = \frac{4x-3}{x^2+1}.$$

Si $x > \frac{3}{4}$, $f(x) - 3 > 0$, donc C est strictement au-dessus de D .

Si $x < \frac{3}{4}$, $f(x) - 3 < 0$, donc C est strictement au-dessous de D .

C et D sont sécantes au point d'abscisse $\frac{3}{4}$.

2. f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(6x+4)(x^2+1) - 2x(3x^2+4x)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^3+4x^2+6x+4-6x^3-8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(2x^2-3x-2)}{(x^2+1)^2}.$$

Pour tout x , $2x^2 - 3x - 2 = (x-2)(2x+1)$

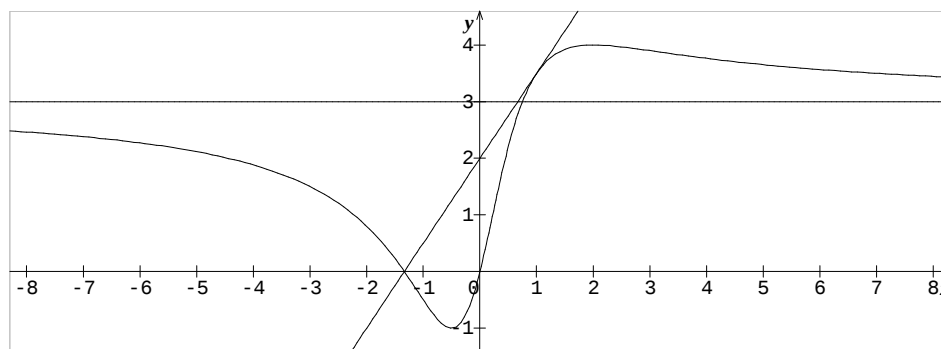
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $-(x-2)(2x+1)$.

3. Les variations de f sont résumées dans le tableau.

x	$-\infty$	$-1/2$	2	$+\infty$	
f '(x)	-	0	+	0	-
f (x)	3			4	

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -1 3

4. $f(1) = \frac{7}{2}$ et $f'(1) = \frac{3}{2}$, une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = \frac{3}{2}(x-1) + \frac{7}{2}$,
 soit $y = 1,5x + 2$.



Exercice 3

1. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30$.

Pour tout x , $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$. On en déduit le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$ 35	$\searrow$ 3	$\nearrow$ $+\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

2. Si $x \in [-1, +\infty[$, $f(x) > 0$, d'après le tableau de variations.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, au vu du tableau de variations et par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f admet une racine unique α sur $]-\infty, -1]$.

3. $f(-3,082) \approx -0,0332$ et $f(-3,081) \approx 0,0047$, donc $-3,082 < \alpha < -3,081$.