

On pourra utiliser, sans le redémontrer, le résultat suivant : soit a et b appartenant à $\mathbb{Z}^*$, si $a = bq + r$, où q et r appartiennent à $\mathbb{Z}$, alors $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$.

Exercice 1

On considère l'équation : $23x + 18y = 3$ (1) où x et y sont des entiers relatifs.

1. Dire pourquoi il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $23u + 18v = 1$.
2. Déterminer un tel couple, et en déduire une solution particulière de (1).

Exercice 2

Soit n un entier naturel, on note $A = 7n + 5$ et $B = 2n + 3$.

1. Trouver une relation entre A et B indépendante de n . En déduire les valeurs possibles du PGCD de A et B .
 2. Montrer que $\text{PGCD}(A, B) = \text{PGCD}(n - 4, 11)$.
- Pour quelles valeurs de n a-t-on $\text{PGCD}(A, B) = 11$?

Exercice 3

Rappel : soit a, b et c appartenant à $\mathbb{Z}^*$, si $\text{PGCD}(a, b) = 1$, alors $\text{PGCD}(a, bc) = \text{PGCD}(a, c)$.

Soit n un entier ≥ 2 , on pose $A = (n - 1)(n^2 + 3n)$ et $B = (n - 1)(2n + 1)$.

1. Montrer que $\text{PGCD}(n, 2n + 1) = 1$.
2. Montrer que $\text{PGCD}(2n + 1, n + 3) = \text{PGCD}(n + 3, 5)$.
3. En déduire selon les valeurs de n $\text{PGCD}(A, B)$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

En déduire que u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

2. a) Montrer que, pour tous entiers naturels n et p tels que $n \geq p$, $u_n = u_p(u_{n-p} + 1) + u_{n-p}$.

b) En déduire que $\text{PGCD}(u_n, u_p) = \text{PGCD}(u_p, u_{n-p})$.

3. Montrer que $\text{PGCD}(u_{2005}, u_{15}) = \text{PGCD}(u_{1990}, u_{15}) = \text{PGCD}(u_{10}, u_{15}) = \text{PGCD}(u_5, u_5) = 31$.