Rappels :
1. soit a et b appartenant à $\mathbb{Z}^*$, si $a = bq + r$, où q et r appartiennent à $\mathbb{Z}$, alors PGCD(a, b) = PGCD(b, r).
2. soit a, b et c appartenant à $\mathbb{Z}^*$, si $\text{PGCD}(a, b) = 1$, alors $\text{PGCD}(a, bc) = \text{PGCD}(a, c)$.

Exercice 1

1. Citer le théorème de Bézout.
2. A l'aide de ce théorème, montrer que $3n + 7$ et $4n + 9$, $n \in \mathbb{N}$, sont premiers entre eux.

Exercice 2

1. Déterminer PGCD(693, 259) grâce à l'algorithme d'Euclide.
2. Déterminer deux entiers relatifs u et v appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que $693u + 259v = 14$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel, on note $A = 3n + 1$ et $B = 5n + 3$.
1. Montrer que $\text{PGCD}(A, B) = \text{PGCD}(n - 1, 4)$.
2. En déduire, selon le reste de la division euclidienne de n par 4, le PGCD de A et B.

Exercice 4

Soit n un entier ≥ 2, on pose $A = (n-1)(n^2 + 3n)$ et $B = (n-1)(2n+1)$.
1. Montrer que $\text{PGCD}(n, 2n+1) = 1$.
2. Montrer que $\text{PGCD}(2n+1, n+3) = \text{PGCD}(n+3, 5)$.
3. En déduire, selon les valeurs de n, $\text{PGCD}(A, B)$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n - 1$.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$.
En déduire que $\text{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 3$.
2. a) Montrer que, pour tous entiers naturels n et p tels que $n \geq p$, $u_n = u_p(u_{n-p} + 1) + u_{n-p}$.
b) En déduire que $\text{PGCD}(u_n, u_p) = \text{PGCD}(u_p, u_{n-p})$.
3. Montrer que $\text{PGCD}(u_{2012}, u_{10}) = \text{PGCD}(u_2, u_{10}) = \text{PGCD}(u_2, u_0) = 15$.