Exercice 1

1. Théorème de Bézout : soit a et b deux entiers relatifs non nuls et D = pgcd (a,b). Il existe u et v appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que : au + bv = D.
En particulier : pgcd (a,b) = 1 si et ssi il existe u et v appartenant à $\mathbb{Z}$ tels au + bv = 1.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4\times(3n+7)-3\times(4n+9)=1$, donc $PGCD(3n+7,4n+9)=1$.

Exercice 2

1. Algorithme d'Euclide :

$693 = 259\times 2+175$

$259 = 175\times 1+84$

$175 = 84\times 2+7$

$84 = 7\times 12$

	1	0
	0	1
2	1	-2
1	-1	3
2	3	-8

PGCD(693, 259) = 7

2. On a $693\times 3+259\times(-8)=7$, donc $693\times 6+259\times(-16)=14$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel, on note $A=3n+1$ et $B=5n+3$.

1. On a : $5n+3=(3n+1)\times 1+2n+2$, $3n+1=(2n+2)\times 1+n-1$, $2n+2=(n-1)\times 2+4$.
D'où $PGCD(A,B)=PGCD(3n+1,2n+2)=PGCD(2n+2,n-1)=PGCD(n-1,4)$.

2. Soit $k\in\mathbb{N}$,
si n = 4k, alors PGCD(A,B) = PGCD(4k – 1, 4) = 1,
si n = 4k + 1, alors PGCD(A,B) = PGCD(4k, 4) = 4,
si n = 4k + 2, alors PGCD(A,B) = PGCD(4k + 1, 4) = 1,
si n = 4k + 3, alors PGCD(A,B) = PGCD(4k + 2, 4) = 2.

Exercice 4

Soit n un entier ≥ 2, on pose $A=(n-1)(n^2+3n)$ et $B=(n-1)(2n+1)$.

1. On a : $(2n+1)\times 1+n\times(-2)=1$, donc, par le théorème de Bézout, $PGCD(n,2n+1)=1$.

2. On a : 2n + 1 = 2(n+3) – 5, donc $PGCD(2n+1,n+3)=PGCD(n+3,5)$.

3. On a :

$$\begin{aligned} PGCD(A,B) &= PGCD((n-1)n(n+3),(n-1)(2n+1)) = (n-1)PGCD(n(n+3),2n+1) \\ &= (n-1)PGCD(2n+1,n+3) && \text{car } PGCD(n,2n+1)=1 \\ &= (n-1)PGCD(n+3,5) && \text{d'après 2} \end{aligned}$$

Si 5/(n+3), soit $n\equiv 2[5]$, alors PGCD(A,B) = 5(n – 1). Sinon PGCD(A,B) = n – 1.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=4^n-1$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $4u_n+3=4\times(4^n-1)+3=4^{n+1}-1=u_{n+1}$.
On en déduit que $PGCD(u_n,u_{n+1})=PGCD(u_n,3)=3$.
En effet, pour tout n, $4^n\equiv 1[3]$, donc $u_n\equiv 0[3]$

2. a) Pour tous entiers naturels n et p tels que $n\geq p$,
$u_p(u_{n-p}+1)+u_{n-p}=(4^p-1)4^{n-p}+4^{n-p}-1=4^n-1=u_n$.
b) Pour tout $n\geq p$, $u_n=u_p(u_{n-p}+1)+u_{n-p}$; on en déduit que $PGCD(u_n,u_p)=PGCD(u_p,u_{n-p})$.

3. D'après la propriété précédente, on a :

$$\begin{aligned} PGCD(u_{2012},u_{10}) &= PGCD(u_{2002},u_{10}) = PGCD(u_{1992},u_{10}) \\ &= PGCD(u_2,u_{10}) && \text{car } 1992=199\times 10+2 \\ &= PGCD(u_2,u_8)=PGCD(u_2,u_0)=u_2=15 \end{aligned}$$