

Exercice 1

A. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1-x) + 1$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x , $g'(x) = -xe^x$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (limites du cours), d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = 1$.

Les variations de g sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	
$g(x)$				

2. Remarquons que la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}^-$.

g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, au vu du tableau de variations et par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, g admet un zéro unique α sur $\mathbb{R}^+$.

$g(1,27) \approx 0,0386$ et $g(1,28) \approx -0,0071$ donc $1,27 < \alpha < 1,28$.

3. Le signe de $g(x)$ est résumé dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

B. Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Pour tout $x > 0$, $\frac{e^x + 1}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (limite du cours) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x} = +\infty$.

On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 2$. C_f admet la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote en $+\infty$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. On en déduit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$.

b) Pour tout x , $f(x) - (x+2) = -\frac{xe^x}{e^x + 1}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (limites du cours), d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+2)) = 0$. La droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à C_f en $-\infty$.

c) Pour tout $x > 0$, $f(x) - (x+2) < 0$, C_f est strictement au-dessous de D .

Pour tout $x < 0$, $f(x) - (x+2) > 0$, C_f est strictement au-dessus de D .

La courbe traverse l'asymptote au point d'abscisse 0.

3. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x , $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

Donc f' a même signe que la fonction g étudiée dans la partie A.

b) $g(\alpha) = 0$, soit $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$, de là $e^\alpha + 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$. D'où $f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} + 2 = \alpha - 1 + 2 = \alpha + 1$.

c) Les variations de f sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	$\alpha+1$	2

Exercice 2

- Pour tout x , $f_0(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, d'où $\lim_{-\infty} f = 0$.
 - Pour tout x , $f_0(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, d'où $\lim_{+\infty} f = 1$.
 - C_0 admet l'axe Ox comme asymptote en $-\infty$, et admet l'axe d'équation $y = 1$ comme asymptote en $+\infty$.
- Pour tout x , $f_0(x) + f_0(-x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{1 + e^x} = 1$. On en déduit que le point $K\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C_0 .
- f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x , $f_0'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$. f_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $f_0(0) = 1/2$, $f_0'(0) = 1/4$. Une équation de la tangente T à la courbe C_0 au point K est $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.
 - Pour tout x , $f_0(x) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{2e^x - xe^x - 2 - x}{4(e^x + 1)} = \frac{g(x)}{4(e^x + 1)}$. Pour étudier la position de T par rapport à la courbe C_0 , il suffit donc d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$, où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.
 - Pour tout x , $g'(x) = (1 - x)e^x - 1$, $g''(x) = -xe^x$.
 - Les variations de g' et g sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g''(x)	+	0	-
g'(x)	-	0	-
g(x)	+	0	-

- Pour tout $x > 0$, $g(x) < 0$, C_0 est strictement au-dessous de T.
Pour tout $x < 0$, $g(x) > 0$, C_0 est strictement au-dessus de T.
T traverse C_0 au point d'abscisse 0. Tracer C_0 et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Pour tout x , $f_0(x) + f_1(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = 1$.
On en déduit que les points $M(x; f_0(x))$ et $M'(x; f_1(x))$ sont symétriques par rapport à la droite D d'équation $y = 1/2$.
 - C_1 est l'image de C_0 par la réflexion d'axe D.