

Exercice 1

1.

a. D $P(M_2 \cap N) = P(M_2) \times P_{M_2}(N) = 0,3 \times 0,8 = \frac{6}{25}$

b. B $P(N) = P(M_1 \cap N) + P(M_2 \cap N) = 0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,8 = \frac{33}{50}$

c. A $P_N(M_2) = \frac{P(M_2 \cap N)}{P(N)} = \frac{0,24}{0,66} = \frac{4}{11}$

2.

a. C $\frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{84}$

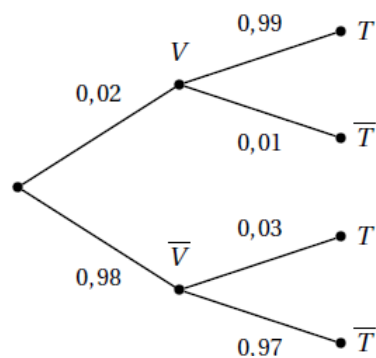
b. A $\frac{\binom{4}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$

c. C $1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{20}{21}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq 95$

Exercice 2

Partie A

1. a. On a : $P(V) = 0,02$, $P_V(T) = 0,99$ et $P_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0,97$.



b. $P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$

2. $P(T) = P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T) = P(V) \times P_V(T) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(T)$ (formule des probabilités totales), d'où $P(T) = 0,02 \times 0,99 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492$.

3. a. On a : $P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,402$, donc, si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de "chances" que la personne soit contaminée.

b. On a : $P_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,0492} \approx 0,9998$, donc, si le test est négatif, il y a 99,98% de "chances" que la personne ne soit pas contaminée.

Partie B

1. On considère que les tirages sont indépendants, on a donc un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes contaminées suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,02.

2. On a : $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,98^{10} - 10 \times 0,02 \times 0,98^9 \approx 0,0162$.

Exercice 3

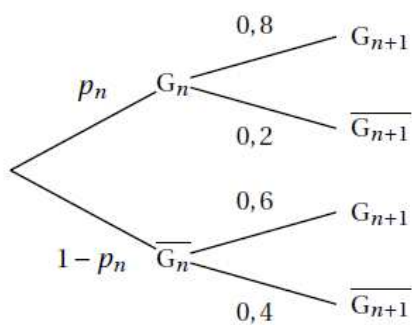
1. On a : $P(G_1) = 0,1$, $P_{G_1}(G_2) = 0,8$ et $P_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,6$, d'où

$$p_2 = P(\overline{G_1} \cap G_2) + P(G_1 \cap G_2) = P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2) + P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) = 0,9 \times 0,6 + 0,1 \times 0,8 = 0,62.$$

$$2. P_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{P(\overline{G_1} \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{0,54}{0,62} = \frac{27}{31} \approx 0,871$$

3. Soit A l'événement : " le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières ".
 $\overline{A} = \overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}$ et $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 1 - 0,144 = 0,856$.

4. On a l'arbre suivant :



d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) + P(G_n \cap G_{n+1}) = P(\overline{G_n}) \times P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) + P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) \\ &= (1 - p_n) \times 0,6 + p_n \times 0,8 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} p_n \end{aligned}$$

5. Montrons, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

On a $\frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{2}{20} = 0,1 = p_1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$, alors

$$p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} = \frac{3}{20} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{3}{5} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$$

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, donc $\lim \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, d'où $\lim p_n = \frac{3}{4}$.