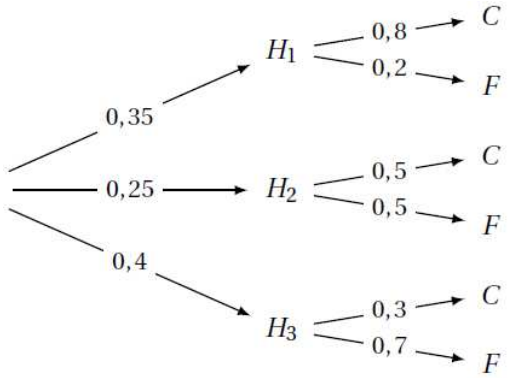
Exercice 1

1. a. **A**
1. b. **A**
2. a. **B**
2. b. **C**
3. a. **B**
3. b. **C**
3. c. **A**
3. d. **C**

Exercice 2

1. a. Arbre pondéré



b. $P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$

c. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) = P(H_3 \cap C) \\ &= P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) \\ &= 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525 \end{aligned}$$

d. $P_C(H_1) = \dfrac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,28}{0,525} = \dfrac{8}{15}$

2. a. On choisit 10 arbres dans le stock, ce stock est suffisamment grand pour que le tirage puisse être assimilé à un tirage avec remise. On a donc un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire qui compte le nombre de conifères suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,525.

b. $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times 0,475^5 \approx 0,243$

c. $P(X \leq 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{9} \times 0,525^9 \times 0,475 - 0,525^{10} \approx 0,984$

Exercice 3

Exercice 3.1

1. Théorème de Bézout : soit a et b deux entiers relatifs non nuls et D = pgcd (a,b). Il existe u et v appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que : au + bv = D.
En particulier : pgcd (a,b) = 1 si et ssi il existe u et v appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que au + bv = 1.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7 \times (8n + 7) - 8 \times (7n + 6) = 1$, donc $PGCD(7n + 6, 8n + 7) = 1$.

Exercice 3.2

1. Algorithme d'Euclide :

$1339 = 949 \times 1 + 390$			1	0	
$949 = 390 \times 2 + 169$			0	1	
$390 = 169 \times 2 + 52$		1	1	-1	
$169 = 52 \times 3 + 13$		2	-2	3	
$52 = 13 \times 4$		2	5	-7	
		3	-17	24	

PGCD(1339, 949) = 13

2. On a $1339 \times (-17) + 949 \times (24) = 13$, donc $1339 \times (-34) + 949 \times (48) = 26$.

Exercice 3.3

On rappelle que si a et b appartiennent à $\mathbb{Z}^*$ et si $a = bq + r$, où q et r appartiennent à $\mathbb{Z}$, alors PGCD(a, b) = PGCD(b, r).

Soit n un entier naturel, on note $A = 4n + 1$ et $B = 5n + 3$.

1. On a : $5n + 3 = (4n + 1) \times 1 + n + 2,\ 4n + 1 = (n + 2) \times 4 - 7$.

D'où $PGCD(A, B) = PGCD(4n + 1, n + 2) = PGCD(n + 2, 7)$.

2. Le PGCD(a,b) est donc un diviseur de 7, ce PGCD vaut donc 1 ou 7.

PGCD(A, B) = 7 si et ssi 7 divise n + 2, soit $n \equiv 5[7]$, sinon PGCD(A, B) = 1.

Exercice 3.4

1. $2^3 = 8 \equiv 1[7]$, $3^3 = 27 \equiv -1[7]$, donc $3^6 \equiv 1[7]$.

2. a. Si $a \equiv r[7]$ avec $1 \leq r \leq 6$, alors $a^6 \equiv r^6[7]$.

Si r = 1, c'est clair.

Si r = 2, $2^3 \equiv 1[7]$, donc $2^6 \equiv 1[7]$

Si r = 3, $3^6 \equiv 1[7]$.

Si r = 4, $4^6 = 2^{12} = (2^6)^2 \equiv 1[7]$.

Si r = 5, $5^6 = 15625 = 7 \times 2232 + 1$, donc $5^6 \equiv 1[7]$.

Si r = 6, $6^6 = 2^6 \times 3^6 \equiv 1[7]$.

b. On appelle ordre de a modulo 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1[7]$.

$6 = k \times q + r$ avec $0 \leq r < k$.

$a^6 = (a^k)^q \times a^r$, or $a^k \equiv 1[7]$et $a^6 \equiv 1[7]$, donc $a^r \equiv 1[7]$.

Or k est le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1[7]$, donc r = 0.

On en déduit que k divise 6.

Les valeurs possibles de k sont 1, 2 , 3 et 6

c. Ordre de tous les entiers a entre 2 et 6.

Nombre	2	3	4	5	6
Ordre	3	6	3	6	2