Terminale S1

Exercice 1

1. **Restitution organisée de connaissances :**

   Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

   Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire

   a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

   b. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. **Application :** Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux évènements indépendants :
   - R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
   - S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

   II a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale $0,1$ et que celle de S est égale à $0,05$. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

   a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

   b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

   c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.

   Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

Exercice 2 : QCM

1. On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.

   On sait que $p(A \cup B) = \dfrac{4}{5}$ et $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{5}$.

   La probabilité de l'évènement B est égale à :

   a. $\dfrac{2}{5}$ **b.** $\dfrac{2}{3}$ **c.** $\dfrac{3}{5}$ **d.** $\dfrac{1}{2}$

2. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

   La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

   a) 6 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 12

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

   S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{9}{10}$.

   Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

   a. $\dfrac{9}{10}$ **b.** $\dfrac{27}{40}$ **c.** $\dfrac{3}{4}$ **d.** $\dfrac{27}{28}$

4. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.
La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

a) $\dfrac{125}{3888}$ **b)** $\dfrac{625}{648}$ **c)** $\dfrac{25}{7776}$ **d)** $\dfrac{3}{5}$

5. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.
Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
Quelle est la variance de X ?

a. 2 b. 13 c. 16 d. 17

Exercice 3 (spécialité)

On rappelle que si a et b appartiennent à $\mathbb{Z}^*$ et si $a = bq + r$, où q et r appartiennent à $\mathbb{Z}$, alors PGCD(a, b) = PGCD(b, r).

Exercice 3.1

Soit a et b appartenant à $\mathbb{Z}^*$, montrer que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a - b, 2a - b)$.

Exercice 3.2

1. Déterminer PGCD(525, 616) grâce à l'algorithme d'Euclide.
2. Déterminer deux entiers relatifs u et v appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que $616u + 525v = 14$.

Exercice 3.3

Soit n un entier naturel, on note $A = 3n + 9$ et $B = 2n + 8$.
1. Montrer que $\text{PGCD}(A, B) = \text{PGCD}(n + 1, 6)$.
2. En déduire, selon le reste de la division euclidienne de n par 6, le PGCD de A et B.

Exercice 3.4

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\text{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 1$.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+2} = 16u_n + 5$.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} \equiv 5[10]$ et $u_{2n-1} \equiv 1[10]$.