Exercice 1

1. a) $B=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$ et $(B\cap A)\cap(B\cap\overline{A})=\varnothing$, d'où $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})$.

b) $P(B\cap\overline{A})=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))=P(B)P(\overline{A})$

2. a) $P(R)=0{,}1$ et $P(S)=0{,}05$.
R et S sont indépendants, donc $\overline{R}$ et S sont indépendants, d'où
$P(\overline{R}\cap S)=P(\overline{R})P(S)=0{,}9\times 0{,}05=0{,}045$.

b) $\overline{R}$ et S sont indépendants, donc $\overline{R}$ et $\overline{S}$ sont indépendants, d'où
$P(\overline{R}\cap\overline{S})=P(\overline{R})P(\overline{S})=0{,}9\times 0{,}95=0{,}855$.

c) Soit X la v.a. égale au nombre de jours où Stéphane entend le réveil. X suit la loi binomiale de paramètres 5 et 0,9.
$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}\times 0{,}9^4\times 0{,}1+\binom{5}{5}\times 0{,}9^5\approx 0{,}9185$

Exercice 2

1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$.
D'où $P(B)=\dfrac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A)}=\dfrac{4/5-2/5}{1-2/5}=\dfrac{2}{3}$.
Réponse b

2. La probabilité que le tireur atteigne au moins une fois sa cible est : $p_n=1-0{,}7^n$.
$p_n\geq 0{,}9\Leftrightarrow 1-0{,}7^n\geq 0{,}9\Leftrightarrow 0{,}7^n\leq 0{,}1$.
On vérifie à la calculatrice que la plus petite valeur de n est 7.
Réponse b

3. S : "je sors mon chien", P : "il pleut". Avec un arbre :

$$P_S(\overline{P})=\frac{P(S\cap\overline{P})}{P(S)}=\frac{\frac{9}{10}\times\frac{3}{4}}{\frac{9}{10}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{4}}=\frac{27}{28}.$$

Réponse d

4. Si X compte le nombre de fois où le joueur perd, X suit la loi binomiale de paramètres 5 et 1/6, donc $P(X=3)=\binom{5}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{250}{7776}=\frac{125}{3888}$.
Réponse a

5. $P(X=10)=\dfrac{1}{6}$, $P(X=1)=\dfrac{2}{6}$, $P(X=0)=\dfrac{3}{6}$
$E(X)=10\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{2}{6}=2$, $E(X^2)=100\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{102}{6}=17$,
$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=17-4=13$
Réponse b

Exercice 3

Exercice 3.1

Montrons que *D*(a, b) = *D*(a - b, 2a - b).

Soit $d \in \mathbb{Z}$. Si d/a et d/b, alors d/(a - b) et d/(2a - b) ; et réciproquement si d/(a - b) et d/(2a - b), alors d/(2a - b - 2(a - b)), soit d/b, et d/(2a - b – (a - b)), soit d/a.

Exercice 3.2

1. Algorithme d'Euclide :

$$616 = 525 \times 1 + 91$$
$$525 = 91 \times 5 + 70$$
$$91 = 70 \times 1 + 21$$
$$70 = 21 \times 3 + 7$$
$$21 = 7 \times 3$$

	1	0
	0	1
1	1	-1
5	-5	6
1	6	-7
3	-23	27

PGCD(616, 525) = 7

2. On a $616 \times (-23) + 525 \times (27) = 7$, donc $616 \times (-46) + 525 \times (54) = 14$.

Exercice 3.3

Soit n un entier naturel, on note $A = 3n + 9$ et $B = 2n + 8$.

1. On a : $3n + 9 = (2n + 8) \times 1 + n + 1,\ 2n + 8 = (n + 1) \times 2 + 6$.

D'où $\mathrm{PGCD}(A, B) = \mathrm{PGCD}(2n + 8, n + 1) = \mathrm{PGCD}(n + 1, 6)$.

2. . Soit $k \in \mathbb{N}$,

si n = 6k, alors PGCD(A,B) = PGCD(6k + 1, 6) = 1,
si n = 6k + 1, alors PGCD(A,B) = PGCD(6k + 2, 6) = 2,
si n = 6k + 2, alors PGCD(A,B) = PGCD(6k + 3, 6) = 3,
si n = 6k + 3, alors PGCD(A,B) = PGCD(6k + 4, 6) = 2,
si n = 6k + 4, alors PGCD(A,B) = PGCD(6k + 5, 6) = 1,
si n = 6k + 5, alors PGCD(A,B) = PGCD(6k + 6, 6) = 6.

Exercice 3.4

1. $u_2 = 5, u_3 = 21, u_4 = 85, u_5 = 341$.
2. Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - 4u_n = 1$, donc, par le théorème de Bézout, $\mathrm{PGCD}(u_n, u_{n+1}) = 1$.
3. Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1 = 4(4u_n + 1) + 1 = 16u_n + 5$.
4. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} \equiv 5[10]$

$u_2 = 5$, la propriété est vraie pour n = 1.

Supposons que, pour $n \geq 1$quelconque, $u_{2n} \equiv 5[10]$, alors

$u_{2n+2} = 16u_{2n} + 5 \equiv 6 \times 5 + 5[10] \equiv 5[10]$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_{2n-1} \equiv 1[10]$

$u_1 = 1$, la propriété est vraie pour n = 1.

Supposons que, pour $n \geq 1$quelconque, $u_{2n-1} \equiv 1[10]$, alors

$u_{2n+1} = 16u_{2n-1} + 5 \equiv 6 \times 1 + 5[10] \equiv 1[10]$.