**Exercice 1**

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.
2. Soient $p$ et $q$ deux entiers naturels tels que $p$ et $q$ sont premiers entre eux.
   Déduire du théorème de GAUSS que, si $a$ est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 \quad [p]$ et $a \equiv 0 \quad [q]$, alors $a \equiv 0 \quad [pq]$.

**Exercice 2**

Chercher les entiers naturels non nuls a et b avec a < b tels :

(1) $\begin{cases} a + b = 82 \\ \text{PPCM}(a, b) = 528 \end{cases}$

On pourra poser a = Da' et b = Db' où $D = \text{PGCD}(a, b)$.

On montrera que D = 2. Rappel : $\text{PGCD}(a', b') = 1 \Rightarrow \text{PGCD}(a' + b', a'b') = 1$

**Exercice 3**

On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs $N$ tels que

$$\begin{cases} N \equiv 5 \quad (13) \\ N \equiv 1 \quad (17) \end{cases}$$

**a.** Vérifier que 239 est solution de ce système.

**b.** Soit $N$ un entier relatif solution de ce système.
Démontrer que $N$ peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où $x$ et $y$ sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

**c.** Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

**d.** En déduire qu'il existe un entier relatif $k$ tel que $N = 18 + 221k$.

**e.** Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \quad (221)$ et $\begin{cases} N \equiv 5 \quad (13) \\ N \equiv 1 \quad (17) \end{cases}$.