Exercice 1

1. Voir cours
2. Soit p et q appartenant à $\mathbb{N}^*$ tels que p et q sont premiers entre eux.

Soit a est un entier relatif tel que $a \equiv 0[p]$ et $a \equiv 0[q]$. Il existe donc k et k' appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que $a = kp = k'q$. Ainsi p divise k'q et PGCD(p,q) = 1, donc par le théorème de Gauss, p divise k'. Il existe donc k" appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que k' = pk"; il s'ensuit que $a = k"pq$, ainsi $a \equiv 0[pq]$.

Exercice 2

On cherche tous les entiers naturels non nuls a et b avec a < b tels :

$$(1)\ \begin{cases} a+b=82 \\ \text{PPCM}(a,b)=528 \end{cases}$$

On pose a = Da' et b = Db' où D = PGCD(a,b), PGCD(a', b') = 1.

Rappel : $\text{PGCD}(a',b')=1 \Rightarrow \text{PGCD}(a'+b',a'b')=1$

On a :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} D(a'+b')=82 \\ Da'b'=528 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $D = \text{PGCD}(D(a'+b'), Da'b') = \text{PGCD}(82,528) = 2$. Ainsi :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a'+b'=41 \\ a'b'=264 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b'=41-a' \\ a'(41-a')=264 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b'=41-a' \\ a'^2-41a'+264=0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation $x^2-41x+264=0$ sont 33 et 8.

Donc a' = 8 et b' = 33, d'où a = 16 et b = 66.

Exercice 3

1. a) $239 = 13\times18+5 = 17\times14+1$, donc $239 \equiv 5[13]$ et $239 \equiv 1[17]$.

b) Soit N un entier relatif solution de ce système.

Si $N \equiv 5[13]$, il existe un entier relatif y tel que $N = 13y+5$, de même, si $N \equiv 1[17]$, il existe un entier relatif x tel que $N = 17x+1$. Ainsi $13y+5 = 17x+1$, soit $17x-13y=4$.

c)) Déterminons tous les couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation $17x-13y=4$ (1).

Le couple (1, 1) est une solution évidente de (1).

Pour tous x et y appartenant à $\mathbb{Z}$, on a :

$17x-13y=4 \Leftrightarrow 17x-13y=17\times1-13\times1 \Leftrightarrow 17(x-1)=13(y-1)$ (2).

13/17(x-1) et PGCD(17, 13) = 1, donc, par le théorème de Gauss, 13/(x-1); il existe donc k appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $x-1=13k$; d'où, en remplaçant dans (2), $y-1=17k$.

Les couples solutions sont (1 + 13k, 1 + 17k) où $k \in \mathbb{Z}$.

d) Si N est solution du système, il existe un entier relatif x tel que $N = 17x+1$, et il existe un entier relatif k tel que $x = 1+13k$, d'où $N = 17(1+13k)+1 = 18+221k$.

e) D'après la question d, si N est solution du système, alors $N \equiv 18[221]$.

Réciproquement, soit $N = 18+221k$, où $k \in \mathbb{Z}$. Or $221 = 13\times17$, donc $N \equiv 18[17]$, soit $N \equiv 1[17]$, et $N \equiv 18[13]$, soit $N \equiv 5[13]$.